

## Werk

**Titel:** Nieuwe Bewijzen voor de aswenteling der aarde.

**Autor:** Kamerlingh Onnes, Heike

**Verlag:** Wolters

**Ort:** Groningen

**Jahr:** 1879

**Kollektion:** Mathematica; DigiWunschbuch

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN504570137

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN504570137>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=504570137>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

**NIEUWE BEWIJZEN**

**VOOR**

**DE ASWENTELING DER AARDE.**

**Digitalisiert dank  
freundlicher Unterstützung  
von**

**Hans Fischer**

---

[www.DigiWunschbuch.de](http://www.DigiWunschbuch.de)

# NIEUWE BEWIJZEN

VOOR

## DE ASWENTELING DER AARDE.

~~~~~

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJSUNIVERSITEIT TE GRONINGEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

J<sup>HR.</sup> DR. B. H. C. K. VAN DER WIJCK,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

TEGEN DE BEDENKINGEN DER FACULTEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN,

OP DONDERDAG 10 JULI 1879, DES NAMIDDAGS TE 2 UUR,

DOOR

**HEIKE KAMERLINGH ONNES,**

GEBOREN TE GRONINGEN.



GRONINGEN,

J. B. WOLTERS.

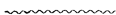
1879.

~~~~~  
**GEDRUKT BIJ J. C. DRABBE TE LEIDEN.**  
~~~~~

**AAN MIJNE OUDERS.**



## VOORWOORD.



In dit proefschrift wordt aangetoond, dat de vermaarde slingerproef van FOUCAULT slechts een zeer bijzonder geval is van eene geheele groep van voor het begrip der betrekkelijke beweging zeer leerzame verschijnselen, die proefondervindelijk even gemakkelijk en overtuigend de draaiing der aarde laten bewijzen.

Waarschijnlijk zullen de experimenteele toepassing dier verschijnselen als bewijs voor de aswenteling der aarde en de behandeling der vraagstukken uit de analytische mechanica, die er mede in verband staan, bij een verschillenden kring van lezers belangstelling wekken. Met het oog daarop is het proefondervindelijk gedeelte zoo bewerkt, dat het afgescheiden van de hoogere wiskundige ontwikkelingen kan worden gevolgd en anderzijds in het eerste Stuk van het Wiskundig Gedeelte „over de betrekkelijke beweging” elke inmenging der proefondervindelijke natuurkunde vermeden. Overdrukken van dit stuk uit het *Nieuw Archief voor Wiskunde* werden mij goedgunstig door het Genootschap „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven” tot dit gebruik verstrekt. Het onderzoek van de storingen van de verschijnselen, die de wiskundige ontwikkeling oplevert, is in het tweede Stuk van het Wiskundig Gedeelte bevat.

Bij het bewerken van dit proefschrift heb ik getracht de les te behartigen, die voor een aankomend beoefenaar der natuurwetenschap opgesloten ligt in de volgende woorden van HELMHOLTZ in zijne „*Gedächtnissrede auf GUSTAV MAGNUS*”:

„Gegenwärtig scheint es mir, als wenn immer mehr und mit Recht die Ueberzeugung Boden gewönne, dass in dem entwickelteren Zustande

---

der Wissenschaft nur derjenige fruchtbar experimentiren könne der eine eindringende Kenntniss der Theorie hat und ihr gemäss die rechten Fragen zu stellen und zu verfolgen weiss; und andererseits dass nur derjenige fruchtbar theoretisiren könne, der eine breite praktische Erfahrung im Experiment hat”

Mocht uit de behandeling van dit onderwerp mijn ernstig streven blijken om mij in deze richting te ontwikkelen, een streven, dat ik het beste bewijs reken van mijne dankbaarheid jegens U, Hooggeleerde G. KIRCHHOFF, die mij uwe hulp zoo ruimschoots geschonken hebt bij mijne eerste proeven met den slinger van FOUCAULT, waarin ik later de aanleiding tot dit onderzoek vond — en jegens U, Hooggeleerde R. A. MEES voor de welwillendheid, waarmede gij mij steeds uwe hulp en ondersteuning hebt verleend, gedurende de vele jaren, die ik onder uwe leiding werkzaam was.

---

## ERRATA.

- pag. 4, reg. 10 v. o., moet *nu* wegvallen.  
reg. 11 v. o., moet worden toegevoegd: , terwijl zij voor het in rust gedachte coördinatenstelsel uit (1), met weglating van ( $r$ ) bij de krachtontbondenen, en (2) moeten worden geëlimineerd.
- " 5, reg. 2 v. b., moet *dus* wegvallen.  
reg. 5 en 6 v. b. moet U in plaats van V staan.
- " 8, form. (19), lees  $\dot{x}_i$  in plaats van  $x_i$ .
- " 8 en 9, form. (22) tot form. (28) moet  $p''$  in plaats van  $p$  staan.
- " 10, „de H van het stelsel” cursiveeren.
- " 21, form. (65), in den tweeden term van het 1<sup>e</sup> lid in D in plaats van D.
- " 22, De zin: Voor een cardanisch enz. te lezen als volgt:  
Voor een cardanisch opgehangen slinger en ook voor een stelsel van stoffelijke punten gebonden aan een vlak, maar vrij daarin bewegelijk, zullen wij echter in Hoofdstuk III zien, dat het niet nul is, maar de levende kracht wanneer het stelsel met de ontbondene van de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel volgens de as, om welke het stoffelijk stelsel niet draaien kan.
- " 27, reg. 3 v. o., achter (1) te lezen: met weglating van de ( $r$ ) bij de krachtontbondenen, d. i. toegepast op een rustend coördinatenstelsel.
- " 28, lees (68<sup>b</sup>) voor (68).
- " 31, reg. 12 en 13 v. b., lees achter (1): met weglating van ( $r$ ) bij de krachtontbondenen.
- " 33, reg. 12 v. b., lees (68<sup>b</sup>) voor (68).
- " 40, reg. 6 v. b., lees  $h - 2\alpha_0$  in den noemer van den laatsten term.

- pag. 68, reg. 2 v. b., lees  $v_1$  en  $w_1$ , in plaats van  $v$  en  $w$ .  
 reg. 17 v. b., lees: „onze integralen van Hoofdstuk II” in plaats van „elliptische integralen”.
- reg. 19 v. b., lees  $p^2$  en  $q^2$  in plaats van  $p$  en  $q$ .  
 reg. 17 v. o., lees  $y_i' = y_i \text{Cos} \psi - x_i \text{Sin} \psi$ .  
 reg. 15 en 13 v. o., lees  $p^2$  en  $q^2$  in plaats van  $p$  en  $q$ .
- „ 75, reg. 18, 15 en 4 v. o., lees  $X_0$  in plaats van  $x_0$ .  
 „ 77, reg. 7 v. o., lees  $S_2$  in plaats van  $S$ .  
 „ 79, reg. 10 v. b., lees  $\frac{\partial S'}{\partial \rho_0}$  in plaats van  $\frac{\partial \rho'}{\partial \rho}$ .  
 „ 115, reg. 10 v. b., lees  $\frac{a' b'}{l^2}$  in plaats van  $\frac{a' b'}{E^2}$ .  
 „ 119, reg. 2 v. b., lees *de toestel* in plaats van *het geheel*.  
 reg. 17 v. o., lees  $y_1, z_1$ , in plaats van  $y, z$ .  
 reg. 7 v. o., lees  $x_3, y_3, z_3$ , in plaats van  $x_3, y, z$  en  $x_2, y_2, z_2$ , in plaats van  $x_2, y, z_2$ .  
 „ 121, reg. 10 v. o.,  $\pi$  in plaats van  $\Pi$ .  
 „ 122, reg. 7 v. b., lees  $T_i$  in plaats van  $T_i$ .  
 „ 123, form. (21), tweede term van  $\xi$ , lees  $\alpha_3'' \text{Sin} m_2$ .  
 „ 125, reg. 2 v. b., lees I in plaats van II.  
 „ 126, reg. 17 v. b., lees *de laatste* in plaats van *deze*.  
 „ 129, reg. 15 v. b., toe te voegen: In dit Hoofdstuk wordt echter  $U'_{\varphi\theta}$  klein van de derde orde gesteld. (Zie de uitbreiding in Hoofdstuk IV.)  
 aan form. (38) moet worden toegevoegd  $-U'_R$ .  
 „ 130, aan form. (40) moet worden toegevoegd  $-U'_R$ .  
 „ 132, form. (47<sup>b</sup>) moet zijn:  

$$p_1' = \sqrt{2A_0(\hbar - \alpha)} \text{Cos} p t', \quad p_2' = \sqrt{2B_0\alpha} \text{Cos} q t'.$$
 form. (49) lees in den teller van eersten term  $2C$ , in den noemer  $C^2$ .  
 „ 133, form. (50) lees in het eerste lid:  

$$\frac{p_1'^2}{2A_0} \text{ en } \frac{p_2'^2}{2B_0}.$$
  
 „ 136, form. (55), lees in den tweeden term  $B'_{\varphi^2}$  voor  $B'_{\varphi}$ .  
 „ 140, reg. 13 v. b., lees *achter orde*: (zie Hoofdstuk IV).  
 reg. 14 v. b. moet *verder* wegvallen.  
 „ 141, form. (68) reg. 1 v. b., lees  $-2m_2 \xi^2$  in plaats van  $-2m_2 \xi$ .  
 reg. 2 v. b., lees  $A_0^{\mu\nu}$  in plaats van  $2A_0^{\mu\nu}$ .

pag. 141, form. (69) laatste vergelijking, lees  $A_{\eta^2}^{\xi\eta}$  in plaats van  $A_{\eta^2}^{\eta}$ .  
aan form. (73) moet worden toegevoegd

$$A_{\xi^2}^{\xi\eta} = -m_2 R.$$

„ 142, form. (77) laatste regel, lees  $A_{\varphi\varphi}$  in plaats van  $A_{\varphi\varphi}$ .

„ 144, reg. 2 v. b., moet  $a_{\gamma\gamma}$  wegvallen.

„ 146, reg. 1 en 3 v. b., lees  $\frac{a}{\sqrt{M}}$  en  $\frac{b}{\sqrt{M}}$  in plaats van  $a$  en  $b$ .

„ 149, form. (71\*) moet in plaats van  $A_0^{\eta\eta}$ ,  $A_0^{\xi\xi}$  en  $A_0^{\xi\eta}$  staan  
 $2A_0^{\eta\eta}$ ,  $2A_0^{\xi\xi}$  en  $2A_0^{\xi}$ .

„ 150, reg. 1 v. b., eveneens.

„ 151, reg. 9 v. o., eveneens.

„ 154, reg. 18 v. o., lees  $A_0^{\eta\eta}$  in plaats van  $A_0^{\xi\eta}$  in 't laatste lid.

„ 155, reg. 6 v. o., lees  $U'_{\mu}$  in plaats van  $U_{\mu}$ .

„ 156, form. (74\*), lees  $-\frac{1}{2}M''$  en  $-\frac{1}{2}M'$  in plaats van  $M''$   
en  $M'$ .

„ 157, reg. 8 v. b., toe te voegen: De scheefte der assen is echter bij onzen slinger van de tweede orde.

„ 158, reg. 8 v. o., lees *het* in plaats van *dit*.

„ 162, reg. 3 v. b., lees *dezelfde* in plaats van *de*.

reg. 4 v. b., lees *zoals* in plaats van *die*.

reg. 9 v. o., na *brenge* moet worden ingevoegd:

In Hoofdstuk II wordt buitendien de werking van eene wrijving onafhankelijk van de snelheid nagegaan, die bij mijne proeven ook van invloed bleek te zijn.

reg. 8 en 7 v. o., lees  $A'_D \sqrt{A_0}$ ,  $B'_D \sqrt{A_0}$  en  $\sqrt{A_0} B'_D$ .

„ 163, reg. 6 v. o., lees *kunnen* in plaats van *kan*.

„ 167, reg. 7 en 8 v. b., lees  $a^{(n)}$  in plaats van  $a^{(n+1)}$ .

reg. 9 v. b., lees  $\frac{A_D}{2}$  in plaats van  $A_D$ .

„ 176, reg. 1 v. b., lees  $\frac{p}{h} \frac{\partial S'}{\partial \alpha'}$  in plaats van  $\frac{\partial S'}{h \partial \alpha'}$ .

reg. 3 v. b., lees  $\partial$  in plaats van  $\delta$ .

reg. 4 v. b., lees  $\varepsilon$  in plaats van  $\delta$ .

„ 178, form. (133) in  $b'_D$ , lees  $\text{Sin} \psi'$  in plaats van  $\text{Sin}^2 \psi'$ .

in  $c'_D$ , lees  $\text{Sin}^2 \psi'$  in plaats van  $\text{Sin} \psi'$ .

„ 180, reg. 18 v. o., lees *Wanneer men*, in plaats van *Wanneer*.

„ 183, form. (149), lees  $\text{Cos} \varepsilon$  in plaats van  $\text{Cos} 2$ .

---

pag. 184, reg. 3 v. b., lees *Sin* in plaats van *Sn*.

" 186, reg. 14 v. b., toe te voegen: of omgekeerd alnaarmate de normale of abnormale onderperiode voorafgaat.  
form. (159), in den noemer van het tweede lid  $8\Omega'$  in plaats van  $\Omega'$ .

reg. 6 v. o.,

$$\Delta_{DII} \chi_2 = -\frac{1}{2} \frac{A_D - B_D}{4\Omega'} \text{Sin } 2\psi_D \sqrt{\text{Cos}^2 \varepsilon} \text{Sin } \psi' (\pm 1 + \text{Cos } 2\delta).$$

" 189, reg. 15 v. b., lees *y* in plaats van *x* en omgekeerd.

" 194, reg. 12 v. b.,  $\frac{d\Delta''}{dt} = \frac{8}{3\pi} (B_{D'} a' - A_{D'} b) \frac{d\Delta'_0}{dt}$ .

reg. 8 v. o., lees  $\frac{4\sqrt{h_0}}{3\pi}$  in plaats van  $\frac{4}{3\pi}$ .

" 195, reg. 7, v. o., lees *negatieve* in plaats van *positieve*.

" 201, reg. 12 v. b., lees  $\Delta \chi_1 = 15'.9$  in plaats van  $\Delta \chi_1 = 18'.1$ .

" 204, reg. 10 v. o., eerste lid  $\frac{d}{dt}$  ( in plaats van  $\frac{d}{dt}$ ,

tweede lid, lees  $\sqrt{h}$  in den noemer in plaats van  $h$ .

" 205, in [q] lees  $'\Delta_D \lg h_2 = -0.0994$ .

in (176)  $'\Delta_D P$  in plaats van  $P'\Delta_D$ .

" 229, reg. 28 v. o., lees Hoofdstuk III in plaats van Hoofdstuk I.

---

**WISKUNDIG GEDEELTE,**

**1<sup>e</sup> STUK.**

**OVER DE BETREKKELIJKE BEWEGING.**



# HOOFDSTUK I.

## TOEPASSING VAN DE METHODEN VAN HAMILTON-JACOBI OP DE THEORIE DER BETREKKELIJKE BEWEGING.

---

§ 1. *De SCHERING'sche krachtfunctie voor de nevenkrachten van CORIOLIS; de canonische differentiaalvergelijkingen en de karakteristieke functie voor de betrekkelijke beweging.*

1. In 't 8<sup>ste</sup> deel van het Journal van LIOUVILLE (2<sup>de</sup> série) heeft BOUR de differentiaalvergelijkingen voor de betrekkelijke beweging in een coördinatenstelsel, dat de meest algemeene beweging van een vast lichaam heeft, door een kunstgreep in den canonischen vorm gebracht. Een wezentlijk voordeel boven de gewone vormen van LAGRANGE heeft deze slechts bij de volgende soort van vraagstukken. De voorwaardevergelijkingen, waardoor de beweging van een stelsel van stofelijke punten beperkt wordt, of de krachten, die op deze werken, of beide, moeten, ten opzichte van een volstrekt vast coördinatenstelsel uitgedrukt, den tijd bevatten. Verder moet er zulk een stelsel van bewegende coördinatenassen kunnen worden aangegeven, dat de uitdrukking van de voorwaardevergelijkingen ten opzichte daarvan, en van de krachten, telkens ten opzichte van hetzelfde, maar in zijne oogenblikkelijke ligging plotseling vastgedachte, coördinatenstelsel ge-

nomen, eenvoudiger en zoo mogelijk van den tijd onafhankelijk worden.

In zulk een geval ligt het immers voor de hand, de volstreckte beweging van het stoffelijke stelsel door coördinatenherleiding uit de betrekkelijke ten opzichte van het bewegende coördinatenstelsel af te leiden. En in deze zal men meestal slechts daardoor inzicht kunnen krijgen, dat men haar als gestoorde beweging opvat, terwijl men als ongestoorde beweging, die van hetzelfde stoffelijke stelsel onder dezelfde voorwaarden en krachten ten opzichte van hetzelfde, maar nu volstrekt vast gedachte, coördinatenstelsel beschouwt. Wanneer dit coördinatenstelsel daarentegen op de voorgeschreven wijze beweegt, en de krachten en voorwaardevergelijkingen overeenkomstig met de beweging van het laatste veranderen, doet de storing ten gevolge van de beweging der coördinatenassen deze ongestoorde, meer eenvoudige, beweging in de betrekkelijke beweging, die wij onderzoeken, overgaan. Wij willen aannemen, dat voor het ongestoorde vraagstuk de canonische vorm van de differentiaalvergelijkingen en van de integraalvergelijkingen mogelijk en bekend is

Het voordeel van de kennis der canonische differentiaalvergelijkingen voor de betrekkelijke beweging ligt nu daarin, dat men de differentiaalvergelijkingen voor de gestoorde elementen in den bijzonder eenvoudigen canonischen vorm brengen, en door differentiatie uit eene zelfde storingsfunctie afleiden kan. Deze laatste vindt men door het verschil te nemen van de karakteristieke functien voor de gestoorde en voor de ongestoorde beweging, beide uitgedrukt in dezelfde coördinaten, en daarbij de grootheden, die met dezelfde coördinaten in de beide gevallen tot een canonisch stelsel samengevoegd zijn, ofschoon zij eene verschillende mechanische beteekenis hebben, gelijk te stellen. BOUR duidt de vorming van de storingsfunctie in het belangrijkste geval, nl. wanneer de tijd niet in de voorwaardevergelijkingen en de snelheden niet in de krachten voorkomen, slechts op deze wijze door eene nog uit te voeren bewerking aan. Haar eigenlijke aard blijft daardoor verborgen; maar wij zullen in het volgende aantoonen, dat zij uit twee deelen bestaat, waarvan het eene van uiterst eenvoudigen vorm en mechanische beteekenis is, en terstond neergeschreven kan worden, wanneer het stoffelijke stelsel en de beweging van het coördinatenstelsel, ten opzichte waarvan men de beweging onderzoekt, gegeven is; terwijl het andere alleen in het geval, dat er voorwaardevergelijkingen gegeven zijn, moet worden toegevoegd. Tevens zullen wij den kunstgreep en de beschouwingen van BOUR onder het

meer algemeene gezichtspunt van de theorie van HAMILTON-JACOBI, zooals die door SCHERING uitgebreid is, brengen, en zijne uitkomsten uitbreiden.

2. Wanneer  $x_i, y_i, z_i$  de coördinaten van een stoffelijk punt  $i$  met de massa  $m_i$  in het bewegend coördinatenstelsel, en  $\frac{X_i^{(r)}}{m_i}, \frac{Y_i^{(r)}}{m_i}, \frac{Z_i^{(r)}}{m_i}$  de ontbondenen van de betrekkelijke versnelling zijn, die het ten gevolge van de werkende krachten en de gegeven beweging van het coördinatenstelsel, wanneer het vrij was, verkrijgen zou; zoo bepalen

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{dx_i}{dt}, & m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} &= X_i^{(r)} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}, \\ \dot{y}_i &= \frac{dy_i}{dt}, & m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} &= Y_i^{(r)} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i}, \\ \dot{z}_i &= \frac{dz_i}{dt}, & m_i \frac{d\dot{z}_i}{dt} &= Z_i^{(r)} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\Phi_r = 0 \dots \dots \dots (2)$$

die beweging van het stelsel van stoffelijke punten in het bewegende coördinatenstelsel, welke buitendien voldoet aan de voorwaarden (2), waar de  $\Phi_r$  functien van  $x_i, y_i, z_i$ , en den tijd  $t$  zijn. De  $\lambda_r$  moeten uit (1) en (2) worden geëlimineerd.

Laat nu het coördinatenstelsel linksch gekozen zijn, d. w. z. zoo, dat de  $+x$  as aan de rechter-, de  $+y$  as aan de linkerhand ligt, wanneer men aan de zijde van de  $+z$  as op het  $yx$  vlak staande in de richting tusschen de  $+y$  en  $+x$  as ziet; en noemen wij den zin van eene draaiing van  $\frac{\pi}{2}$  om de  $+x$  as, die de  $+y$  as in den vroegeren stand van de  $+z$  as brengt, positief. Verder duiden wij met  $\alpha, \beta, \gamma$  de ontbondenen van de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel om zijne oogenblikkelijke as, met  $u, v, w$  die van de snelheid, met  $u', v', w'$  die van de versnelling van zijne voortgaande beweging, met  $X_i, Y_i, Z_i$  die van de kracht, welke op het beschouwde punt  $i$  werkt, aan; allen bij  $t$  genomen ten opzichte van het rustende, op elk oogenblik echter anders liggende stelsel, hetwelk uit dat der  $x, y, z$  ontstaat, wanneer men dit telkens in zijn stand bij  $t$  plotseling vast denkt. Dan zijn de ontbondenen van de *force d'entraînement* van CORIOLIS volgens dezelfde assen, die wij met  $X_i^{(e)}, Y_i^{(e)}, Z_i^{(e)}$  aangeven zullen,

$$\left. \begin{aligned}
 X_i^e &= -m_i u' + m_i \beta (\beta x_i - \alpha y_i) - m_i \gamma (\alpha z_i - \gamma x_i) + \\
 &\quad + m_i \left( y_i \frac{d\gamma}{dt} - z_i \frac{d\beta}{dt} \right), \\
 Y_i^e &= -m_i v' + m_i \gamma (\gamma y_i - \beta z_i) - m_i \alpha (\beta x_i - \alpha y_i) + \\
 &\quad + m_i \left( z_i \frac{d\alpha}{dt} - x_i \frac{d\gamma}{dt} \right), \\
 Z_i^e &= -m_i w' + m_i \alpha (\alpha z_i - \gamma x_i) - m_i \beta (\gamma y_i - \beta z_i) + \\
 &\quad + m_i \left( x_i \frac{d\beta}{dt} - y_i \frac{d\alpha}{dt} \right);
 \end{aligned} \right\} (3)$$

dus volgens de bekende stelling van CORIOLIS

$$\left. \begin{aligned}
 X_i^{(r)} &= X_i^e + X_i + 2 m_i (\gamma \dot{y}_i - \beta \dot{z}_i), \\
 Y_i^{(r)} &= Y_i^e + Y_i + 2 m_i (\alpha \dot{z}_i - \gamma \dot{x}_i), \\
 Z_i^{(r)} &= Z_i^e + Z_i + 2 m_i (\beta \dot{x}_i - \alpha \dot{y}_i),
 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

waar de laatste leden de ontbondenen van de *force centrifuge composée* van CORIOLIS zijn.

De bewegingsvergelijkingen (1) gaan dus over in

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_i &= \frac{dx_i}{dt}, \quad m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} = X_i^e + X_i + 2 m_i (\gamma \dot{y}_i - \beta \dot{z}_i) + \sum_r \lambda'_r \frac{\partial \phi_r}{\partial x_i}, \\
 \dot{y}_i &= \frac{dy_i}{dt}, \quad m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} = Y_i^e + Y_i + 2 m_i (\alpha \dot{z}_i - \gamma \dot{x}_i) + \sum_r \lambda'_r \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i}, \\
 \dot{z}_i &= \frac{dz_i}{dt}, \quad m_i \frac{d\dot{z}_i}{dt} = Z_i^e + Z_i + 2 m_i (\beta \dot{x}_i - \alpha \dot{y}_i) + \sum_r \lambda'_r \frac{\partial \phi_r}{\partial z_i},
 \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\phi_r = 0; \dots$$

en de  $\lambda$  zijn hierin geaccentueerd, omdat zij nu uit (5) en (2) moeten worden geëlimineerd.

Stelt men met BOUR

$$K = -u' \sum_i m_i x_i - v' \sum_i m_i y_i - w' \sum_i m_i z_i, \dots (6)$$

$$G = \frac{1}{2} \sum_i m_i [(\gamma y_i - \beta z_i)^2 + (\alpha z_i - \gamma x_i)^2 + (\beta x_i - \alpha y_i)^2], (7)$$

zoo ziet men, dat de drie eerste termen van  $X_i^e$ ,  $Y_i^e$  en  $Z_i^e$  tot eene krachtfunctie, namelijk  $K + G$ , behooren. Ik heb opgemerkt, dat men ook den laatsten term met de samengestelde centrifugaalkracht te zamen opnemen kan, wanneer men het begrip van krachtfunctie uitbreidt op de wijze, die door SCHERING<sup>1)</sup> ten behoeve van eene meer alge-

<sup>1)</sup> *Abhandlungen der Kgl. Ges. der Wissensch. zu Göttingen.* Bd. XVIII.

meene toepassing van HAMILTON-JACOBI's behandelingswijze van mechanische vraagstukken, aangegeven is. Met SCHERING dus  $R_i$  eene der krachten,  $\delta r_i$  de virtueele verplaatsing in hare richting,  $\xi_m$  de rechthoekige coördinaten en  $\dot{\xi}_m$  hunne differentiaalquotienten naar den tijd noemende, beschouwen wij dus die functie  $V$  als krachtfunctie van het stelsel, welke voldoet aan de vergelijking

$$\sum_i R_i \delta r_i = \delta V - \frac{d}{dt} \sum_m \frac{\partial V}{\partial \dot{\xi}_m} \delta \xi_m, \dots \dots \dots (8)$$

waar links over alle krachten, rechts over alle coördinaten gesommeerd moet worden.

Vormt men nu

$$L = \sum m_i \left[ \alpha \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) + \beta \left( z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) + \gamma \left( x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) \right], \dots \dots \dots (9)$$

en neemt men de som over alle massa's, zoo heeft men de SCHERING'sche krachtfunctie van de laatste leden van  $X_i^e$ ,  $Y_i^e$ ,  $Z_i^e$  en van de samengestelde centrifugaalkracht, en is dus  $K + G + L$  de SCHERING'sche krachtfunctie van de nevenkrachten van CORIOLIS.

$K$  is het product van de geheele massa van het stoffelijke stelsel, van de verbindingslijn van het zwaartepunt er van met den oorsprong der coördinaten en van de negatieve ontbondene van de versnelling van den laatste in deze richting.

$G$  is, zooals BOUR<sup>1)</sup> opmerkt, de levende kracht van de draaiing van het bewegende coördinatenstelsel, wanneer men op het oogenblik, dat men  $G$  beschouwt, de stoffelijke punten er plotseling vast mede verbonden denkt.

Eindelijk heeft ook  $L$  eene zeer eenvoudige beteekenis; het is namelijk het moment van de gezamentlijke betrekkelijke bewegingshoeveelheden om de oogenblikkelijke as van den oorsprong, vermenigvuldigd met de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel om deze as; of ook: het moment van het resulteerend koppel van alle betrekkelijke bewegingshoeveelheden, vermenigvuldigd met de ontbondene van de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel volgens de as van dit koppel.

Zijn  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  standvastig, zoo is  $L$  de SCHERING'sche krachtfunctie van de samengestelde centrifugaalkracht alleen.

<sup>1)</sup> Journ. de Liouv., 2<sup>e</sup> Série, Tom. 8. p. 10.

In plaats van de stelling van CORIOLIS kunnen wij dus de volgende stellen.

*Bij de behandeling van de betrekkelijke beweging in een coördinatenstelsel, dat de meest algemeene beweging van een vast lichaam heeft, kan men van de beweging er van afzien, wanneer men aan de werkende krachten (d. w. z. die de volstrekte beweging bepalen) de SCHERING'sche krachtfunctie  $K + G + L$  toevoegt.*

3. Wij zullen ons bepalen tot het geval, dat ook de krachten  $X_i, Y_i, Z_i$  eene SCHERING'sche krachtfunctie  $U^{(a)}$  hebben.

Dan zijn de vraagstukken der betrekkelijke beweging zulke, waar de werkende krachten de SCHERING'sche krachtfunctie

$$U^{(r)} = U^{(a)} + K + G + L \dots \dots \dots (10)$$

hebben. Wij vatten nu de uitkomsten van het onderzoek van SCHERING over deze vraagstukken samen.

Is  $T$  de levende kracht van een willekeurig stelsel van stoffelijke punten, die onderworpen zijn aan eene willekeurige SCHERING'sche krachtfunctie  $U$ , en bestaan tusschen hunne coördinaten en den tijd willekeurige voorwaardevergelijkingen; zijn verder de onafhankelijke coördinaten  $q_1 \dots q_n$ , en drukt men  $T$  en  $U$  in deze en in de  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  uit; zoo worden de  $n$  vergelijkingen

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (T + U)}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i}, \dots \dots \dots (11)$$

de differentiaalvergelijkingen in den tweeden vorm van LAGRANGE. Stelt men

$$p_i = \frac{\partial (T + U)}{\partial \dot{q}_i}, \dots \dots \dots (12)$$

$$H = - [T + U - \Sigma p_i \dot{q}_i]_{p, q}, \dots \dots \dots (13)$$

waar  $[\ ]_{p, q}$  aanduidt, dat de grootheid tusschen de  $[\ ]$  in de  $p_i$  en  $q_i$  is uitgedrukt; zoo zijn de canonische differentiaalvergelijkingen der beweging

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{dp_i}{dt} \dots \dots \dots (14)$$

De integraalvergelijkingen worden gevonden, wanneer men de volledige oplossing van de gedeeltelijke differentiaalvergelijking in  $q_i$  en  $t$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + [H] \frac{\partial V}{\partial q}, q = 0, \dots \dots \dots (15)$$

waar in  $[H]_{p,q}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial q_i}$  in plaats van  $p_i$  gesteld is, volgens de daarin, buiten de additieve voorkomende  $n$  standvastigen  $\psi_s$ , differentieert, en de uitkomst telkens aan eene nieuwe willekeurige standvastige  $-\phi_s$ , gelijk stelt; de intermediaire integralen volgen uit  $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ , wanneer men in plaats van de  $p$  weer de functien van de  $q_i$  en  $\dot{q}_i$ , die zij voorstellen, volgens (12) invoert.

Heeft men verder voor eene bepaalde functie  $E$  van de  $p_i$  en  $q_i$  de canonische integralen  $\phi_s$  en  $\psi_s$  van de  $2n$  vergelijkingen, die met (14) overeenkomen, namelijk van

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}, \quad \frac{\partial E}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt},$$

gevonden; zoo zijn de integraalvergelijkingen van het vraagstuk, voor hetwelk de karakteristieke functie  $H$  is, of voor het gestoorde vraagstuk, dezelfde functien van de  $p_i$  en  $q_i$ , welke, volgens de  $2n$  integraalvergelijkingen

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi_s} = -\phi_s, \dots \dots \dots (16)$$

voor het geval, dat de karakteristieke functie  $E$  was, of voor het ongestoorde vraagstuk, aan de standvastigen  $\phi_s$  en  $\psi_s$  gelijk waren; maar nu gelijk gesteld aan functien van den tijd  $\phi_s$  en  $\psi_s$ , die bepaald worden door

$$\frac{\partial(H-E)}{\partial \phi_s} = \frac{d\psi_s}{dt}, \quad \frac{\partial(H-E)}{\partial \psi_s} = -\frac{d\phi_s}{dt}, \dots \dots (17)$$

waar  $H - E$  met behulp van de integraalvergelijkingen van het ongestoorde vraagstuk in  $\phi$ ,  $\psi$  en  $t$  uitgedrukt is.

Wanneer wij dus de SCHERING'sche krachtfunctie kennen, kunnen wij terstond, gebruik makende van SCHERING's onderzoek, de differentiaalvergelijkingen voor de betrekkelijke beweging in den canonischen vorm brengen; wanneer zij dezen vorm voor het geval, dat het coördinatenstelsel zich werkelijk in rust bevond, aannemen kunnen. Buitendien kan men, de betrekkelijke beweging in het coördinatenstelsel als door de beweging der coördinatenassen gestoorde, en die, welke plaats vinden zou, wanneer de laatste denzelfden stand behielden, als ongestoorde beweging opvattende, de differentiaalvergelijkingen van de gestoorde elementen opstellen in den canonischen vorm.

Voor wij de toepassing nauwkeuriger nagaan, zullen wij de herleiding  $[ ]_p$ , van  $H$  zoover uitvoeren, als dit in 't algemeen mogelijk is.

Voor de beweging in het coördinatenstelsel der  $x, y, z$  is

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \dots \dots \dots (18)$$

en in 't algemeen

$$x_i = \sum_r \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial x_i}{\partial t}; \dots \dots \dots (19)$$

dus

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (r.s) \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_s (0.s) \dot{q}_s + \frac{1}{2} (0.0), \dots (20)$$

wanneer men het symbool  $(r.s)$  in de beteekenis

$$(r.s) = m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial y_i}{\partial q_r} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right), \dots (21)$$

dus

$$(r.s) = (s.r), \dots \dots \dots (22)$$

invoert, en overeenkomstig

$$(0.s) = \sum_i m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial y_i}{\partial t} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial z_i}{\partial t} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right),$$

$$(0.0) = \sum_i m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial t} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial t} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right),$$

stelt. Wanneer men dus  $p_k$  bepaalt door

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

is

$$p_k = \sum_r (r.k) \dot{q}_r + (0.k); \dots \dots \dots (23)$$

en wanneer men de determinante der  $(r.s)$

$$\begin{vmatrix} (1.1) & \dots & (1.n) \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & (r.s) & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ (n.1) & \dots & (n.n) \end{vmatrix} = D, \dots \dots (24)$$

stelt, zoodat volgens (22)

$$\frac{\partial D}{\partial (r.s)} = \frac{\partial D}{\partial (s.r)}, \dots \dots \dots (25)$$

volgt

$$\dot{q}_r = \sum_k \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} (p_k - (0.k)). \dots \dots (26)$$

Dus

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \sum_m \sum_k \frac{(r.s)}{D^2} \frac{\partial D}{\partial (s.m)} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} (p_k - (0.k))(p_m - (0.m)) + \\ + \sum_k \sum_r \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} (0.r)(p_k - (0.k)) + \frac{1}{2}(0.0),$$

of volgens bekende stellingen voor de determinanten

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} p_r p_s - \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} (0.r)(0.s) + \frac{1}{2}(0.0). (27)$$

Wij willen hier de aandacht er op vestigen, dat  $T$  ten opzichte van de  $p$ , afgezien van een term, welke deze niet bevat, steeds homogeen van de tweede orde is; ofschoon het voor het geval, dat in de betrekkingen tusschen de  $q$  en de coördinaten ook de tijd voorkomt, deze eigenschap ten opzichte van de  $\dot{q}$  niet meer heeft. Wanneer echter in de krachtfunctie de snelheden voorkomen, komt in plaats van (23)

$$p_k = \sum_r (r.k) \dot{q}_r + (0.k) + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}; \dots \dots (28)$$

dus voor  $T$

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} p_r p_s - \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} p_r \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} + \\ + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} - \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} (0.r)(0.s) + \frac{1}{2}(0.0).$$

Dan komt het echter voornamelijk op de kennis van de karakteristieke functie aan. Daartoe moet men vormen

$$\dot{q}_r = \sum_k \left( p_k - (0.k) - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)}, \dots \dots (29)$$

en

$$\sum p_r \dot{q}_r = \sum_r \sum_k \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} p_r p_k - \sum_r \sum_k \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} p_r (0.k) - \\ - \sum_r \sum_k \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} p_r \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k};$$

zoodat voor

$$H = [-T - U + \sum p_r \dot{q}_r]_{p,q}$$

komt

$$H = \frac{1}{2} \sum_r \sum_k \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} p_r p_k - \sum_r \sum_k \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)} p_r (0.k) + \\ + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} (0.r)(0.s) - \frac{1}{2} (0.0) - U - \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r}. \quad (30)$$

Men vindt dus  $H$ , wanneer men aan de uitdrukking van  $H$  in 't geval dat geene krachten werken, dus aan de  $H$  van het stelsel,  $H_s$ , toevoegt

$$- \left[ U + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \right],$$

en dan in dit deel voor  $\dot{q}_r$ , de uitdrukking er van in de  $p$ , de  $q$  en den tijd stelt, die men door de oplossing van de vergelijkingen (29), welke ten opzichte van de  $\dot{q}_r$  in 't algemeen niet lineair zijn, verkrijgt. De vergelijking van SCHERING (13) wordt dus eenvoudiger

$$H = H_s - \left[ U + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \right]_{p,q} \dots \quad (31)$$

4. Keeren wij nu terug tot het bijzonder geval der betrekkelijke beweging. Wanneer in 't algemeen de krachtfunctie  $U^{(a)}$ , de snelheden en de voorwaardevergelijkingen den tijd bevatten, vindt men de karakteristieke functie der betrekkelijke beweging en de canonische differentiaalvergelijkingen weer volgens (10), (11), (12) en (13) of (31). Gebruikt men  $E$  voor de ongestoorde beweging, waar  $U = U^{(a)}$ ,  $K = 0$ ,  $G = 0$ ,  $L = 0$ , zoo is volgens (31)

$$E = H_s - \left[ U^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial \dot{q}_s} \right]_{p,q} \left. \begin{array}{l} \\ \dot{q}_r = \sum_k \left( p_k - (0.k) - \frac{\partial U^{(a)}}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)}; \end{array} \right\} \quad (32)$$

en, voor de betrekkelijke beweging schrijvende

$$H = H^{(r)} \text{ en } p = p^{(r)},$$

volgens (10) en (11)

$$H^{(r)} = H_s - K - G \\ - \left[ U^{(a)} + L + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \left( \frac{\partial (U^{(a)} + L)}{\partial \dot{q}_r} \right) \left( \frac{\partial (U^{(a)} + L)}{\partial \dot{q}_s} \right) \right]_{p,q} \left. \begin{array}{l} \\ \dot{q}_r = \sum_k \left( p_k^{(r)} - (0.k) - \frac{\partial (U^{(a)} + L)}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)}. \end{array} \right\} \quad (33)$$

Dan kan men voor de storingsfunctie

$$H^{(r)} - E = S \dots \dots \dots (34)$$

in 't algemeen geene van substitutie vrije uitdrukking aangeven, en de vorming van de karakteristieke functie voor de betrekkelijke beweging uit  $E$  laat zich dan eenvoudiger bij (13) aansluiten.

Want wij hebben

$$H^{(r)} = \left[ E - K - G - L + \sum_m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m \right] p^{(r)} q,$$

en wanneer wij de  $p_m$ , die in  $E$  voorkomen, accentueeren, is  $p^{(r)}$ , dat men in  $H^{(r)}$  invoeren moet,

$$p_m^{(r)} = p'_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}.$$

Maar  $L$  is eene lineaire functie van de  $\dot{x}_i$ ,  $\dot{y}_i$ ,  $\dot{z}_i$ , dus volgens (19) ook van de  $\dot{q}_r$  en

$$\sum_m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = L - \lambda,$$

als

$$\lambda = \sum m_i \left[ \alpha \left( y_i \frac{\partial z_i}{\partial t} - z_i \frac{\partial y_i}{\partial t} \right) + \beta \left( z_i \frac{\partial x_i}{\partial t} - x_i \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \gamma \left( x_i \frac{\partial y_i}{\partial t} - y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \right]. \quad (35)$$

Dus

$$\left. \begin{aligned} H^{(r)} &= [E]_{p^{(r)}} - K - G - \lambda, \\ p'_m &= p_m^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

De grootheid  $\lambda$  heeft eene eenvoudige mechanische beteekenis, die overeenkomt met die van  $L$ . Maar de beschouwde bewegingshoeveelheden zijn niet de betrekkelijke, maar alleen dat deel er van, hetwelk de punten zouden bezitten, wanneer zij bij onveranderde onafhankelijke coördinaten zich overeenkomstig met de verandering van de voorwaardevergelijkingen met den tijd verplaatsten.

De vorming van de karakteristieke functie in het algemeen geval, dat de krachten de snelheden, en de voorwaardevergelijkingen den tijd bevatten, laat zich dus door de vergelijking (36) of in woorden: *de karakteristieke functie ontstaat uit die bij rustende coördinatenassen,*

*wanneer men daarin in plaats van  $p_m$ ,  $p_m^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$  schrijft, en er*

$K + G + \lambda$  van *aftrekt*, door de eenvoudige beteekenis van  $K$ ,  $G$ ,  $L$  en  $\lambda$  zeer doorzichtig uitdrukken.

Laten wij nu overgaan tot het meer belangrijke geval, dat de krachtfunctie  $U^{(a)}$  de snelheden niet bevat. Dan neemt (33) den volgende vorm aan

$$H^{(r)} = H_s - U^{(a)} - K - G - [L]_{p^{(r)}} - \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \left. \begin{aligned} \dot{q}_r &= \sum_k \left[ p_k^{(r)} - (0.k) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.k)}; \end{aligned} \right\} (37)$$

dus

$$H^{(r)} = E - K - G - [L]_{p^{(r)}} - \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s},$$

of wanneer men met  $L_{p'}$  de grootheid aanduidt, die men verkrijgt, wanneer men in plaats van de  $\dot{q}$  hun uitdrukking in de  $p'$ , die voor de ongestoorde beweging geldt, schrijft,

$$H^{(r)} = E - K - G - L_{p'} + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}. \quad (38)$$

Deze uitdrukking zullen wij in § 3 nog nader beschouwen.

Uit (33) volgt terstond, dat zij nog geldig blijft voor het geval, dat  $U$  de snelheden slechts lineair bevat, daar

$$[U^{(a)} + L]_{p'} = [U^{(a)} + L]_{p^{(r)}} + \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial U^{(a)}}{\partial \dot{q}_s} \right].$$

5. Wij zullen de vergelijkingen nu nog verder specialiseeren en aannemen, dat de voorwaardevergelijkingen den tijd niet bevatten. Wij komen zoo tot het geval, dat door BOUR behandeld is, en (36) gaat over in

$$H^{(r)} = [E]_{p^{(r)}} - K - G, \quad p_i^{(r)} = \frac{\partial (T^{(r)} + L)}{\partial \dot{q}_i},$$

of, omdat  $G$  de  $\dot{q}_i$  niet bevat,

$$T^{(r)} + L + G = T_2 \dots \dots \dots (39)$$

stellende,

$$\left. \begin{aligned} H^{(r)} &= [E]_{p^{(r)}} - K - G, \\ p_i^{(r)} &= \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

terwijl de invoering van  $T_2$  in (11), wanneer deze op de betrekkelijk

beweging toegepast worden, en dus  $T = T^{(r)}$ ,  $U = U^{(r)}$  is, deze volgens (10) in

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_i} = \frac{\partial (U^{(a)} + K)}{\partial q_i} \dots \dots \dots (41)$$

doet overgaan.

BOUR verkrijgt deze vergelijkingen door een kunstgreep, die bestaat in de invoering van de door

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \frac{dx_i}{dt} + \beta z_i - \gamma y_i, \\ \eta_i &= \frac{dy_i}{dt} + \gamma x_i - \alpha z_i, \\ \zeta_i &= \frac{dz_i}{dt} + \alpha y_i - \beta x_i, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

bepaalde grootheden  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  in de bewegingsvergelijkingen van den eersten vorm van LAGRANGE (5), welke daardoor in

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d\xi_i}{dt} &= X_i + m_i \gamma \eta_i - m_i \beta \zeta_i - m_i u' + \sum_r \lambda'_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d\eta_i}{dt} &= Y_i + m_i \alpha \zeta_i - m_i \gamma \xi_i - m_i v' + \sum_r \lambda'_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d\zeta_i}{dt} &= Z_i + m_i \beta \xi_i - m_i \alpha \eta_i - m_i w' + \sum_r \lambda'_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} (43)$$

overgaan, en dan met (2) en (42) samen de bewegingsvergelijkingen uitmaken.

De vergelijkingen (39), (40), (41) zijn nu juist de einduitkomst van de twee eerste Hoofdstukken van zijne verhandeling <sup>1)</sup>. BOUR definieert namelijk

$$T_2 = T^{(r)} + L + G = \sum_i \frac{m_i}{2} \{ \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 \}, \dots (44)$$

en volgens (7) en (9) ontstaat deze betrekking uit (42).

De  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  zijn de ontbondenen van de snelheid volgens de assen van een voor elk tijdstip verschillend coördinatenstelsel, welks oorsprong voortdurend met dien van het bewegende stelsel blijft samenvallen, terwijl de assen evenwijdig aan zich zelf uit hunnen stand op dat tijdstip verschuiven; de vergelijkingen (42) kunnen als

<sup>1)</sup> Journ. de Liouv., 2<sup>e</sup> Série, Tom. 8.

onmiddellijke uitdrukking daarvan terstond worden neergeschreven.  $T_2$  is de levende kracht van het stoffelijke stelsel ten opzichte van hetzelfde hulpcoördinatenstelsel. Deze rol in de vergelijkingen van LAGRANGE (41) en in de canonische ((40) met (14) samen) speelt zij echter slechts, wanneer de krachtfunctie de snelheden, en de voorwaardevergelijkingen den tijd niet bevatten. In 't geval van vrij bewegende stoffelijke punten heeft men

$$H^{(r)} = [T^{(r)} - U^{(a)} - G - K]_{p,q},$$

hetwelk in de coördinaten en de  $\frac{\partial T_2}{\partial \dot{x}_i} = m_i \xi_i$ , enz. volgens (40)

moet worden uitgedrukt, omdat de rechthoekige coördinaten tegelijkertijd de onafhankelijke coördinaten zijn; dus worden de vergelijkingen (14) tot

$$\frac{\partial H^{(r)}}{\partial (m_i \xi_i)} = \frac{dx_i}{dt}, \quad - \frac{\partial H^{(r)}}{\partial x_i} = \frac{d(m_i \xi_i)}{dt},$$

de canonische differentiaalvergelijkingen, die BOUR opgeeft. Uit deze ziet men recht duidelijk, hoe de kunstgreep van BOUR door het onderzoek van SCHERING in het geval van vrij bewegende stoffelijke punten juist aangewezen wordt. Toen eens de canonische vorm voor de bewegingsvergelijkingen van een stelsel van vrije punten gevonden was, lag het voor de hand hoe de meer algemeene vergelijkingen (43) behandeld moesten worden.

BOUR werd er waarschijnlijk toe gebracht door de volgende opmerking, die men analytisch ingekleed in zijne verhandeling vindt. Wanneer men in het telkens plotseling vastgedachte stelsel der  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  met de coördinaten  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  een punt construeert, zoo is de snelheid daarvan ten opzichte van het hulpcoördinatenstelsel, dat wij op de vorige bladzijde ingevoerd hebben, de versnelling van het punt  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  in dit stelsel. Hare ontbondenen  $\Xi_i$ ,  $H_i$ ,  $Z_i$  hangen met de verandering van  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  juist zoo samen, als de  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  zelve met de verandering der coördinaten  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  van het beschouwde punt, dus is

$$\Xi_i = \frac{d\xi_i}{dt} + \beta \zeta_i - \gamma \eta_i,$$

$$H_i = \frac{d\eta_i}{dt} + \gamma \xi_i - \alpha \zeta_i,$$

$$Z_i = \frac{d\zeta_i}{dt} + \alpha \eta_i - \beta \xi_i.$$

De volstreekte snelheden en versnellingen  $\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i$  en  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  zijn

$$\left. \begin{aligned} \xi'_i &= \xi_i + u, & \eta'_i &= \eta_i + v, & \zeta'_i &= \zeta_i + w, \\ X'_i &= X_i + u', & Y'_i &= Y_i + v', & Z'_i &= Z_i + w'. \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

Voert men de vergelijkingen (42), die men evenzoo met behulp van meetkundige aanschouwing terstond neerschrijven kan, in, zoo vindt men terstond (4), (5) en (43).

Dit is inderdaad eene zeer gemakkelijke afleiding van de bewegingsvergelijkingen; en zij wordt vooral eenvoudig, wanneer men met BOUR de vergelijkingen (43) en (42) als zoodanig opvat; echter geeft zij niet zulk een helder inzicht in de mechanische beteekenis, als de stelling van CORIOLIS in 't bijzonder in verband met het bewijs van BERTRAND.

§ 2. *Andere afleiding van de canonische differentiaalvergelijkingen voor de betrekkelijke beweging. Voorbeeld van twee SCHERING'sche krachtfunctien voor dezelfde krachten.*

6. Wij willen nu een anderen weg, om tot de differentiaalvergelijkingen der betrekkelijke beweging te komen, nagaan, langs welken eveneens het onderzoek van SCHERING ons in staat stelt tot den canonischen vorm te komen, omdat de uitkomsten daarvan geldig zijn, hoe ook de  $q_i$  van de coördinaten en den tijd afhangen.

Laten wij namelijk de volstreekte beweging in 't oog vatten, die het stelsel van stoffelijke punten door hunne betrekkelijke beweging ten opzichte van het veranderlijke coördinatenstelsel der  $x, y, z$  uitvoert ten opzichte van een volstrekt vast coördinatenstelsel, dat der  $x_0, y_0, z_0$ . Denken wij verder in (11) tot (14) voor  $T$  en  $U$  de levende kracht en de krachtfunctie in de volstreekte beweging  $T^{(a)}$  en  $U_0^{(a)}$ , en voor de  $q_i$  die functien van  $x_0, y_0, z_0, t$  genomen, welke uit de  $q_i$  in de betrekkelijke beweging ontstaan, wanneer men in deze de  $x, y, z$  uitdrukt door  $x_0, y_0, z_0$  en  $t$ , en die dus de voorwaardevergelijkingen identisch bevredigen, en eindelijk in  $T^{(a)}$  en  $U_0^{(a)}$  deze  $q_i$  en  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  in plaats van de  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  ingevoerd.

Dan zijn die vergelijkingen, omdat zij de  $q_i$  bepalen, tegelijkertijd de LAGRANGE'sche, respectie de canonische vergelijkingen van de volstreekte en van de betrekkelijke beweging, alnaarmate daariu de  $q_i$  als

functien van de  $x, y, z, t$  of van de  $x_0, y_0, z_0, t$  worden opgevat, wat echter voor hunne behandeling geen onderscheid maakt.

Door het invoeren van de  $q_i$  gaat  $U_0^{(a)}$  volgens de definitie van  $U^{(a)}$  in § 1, in het laatste over. Ook den vorm van  $T^{(a)}$  kan men gemakkelijk aangeven. Volgens (42) en (45) zijn

$$\left. \begin{aligned} \xi'_i &= \frac{dx_i}{dt} + \beta z_i - \gamma y_i + u, \\ \eta'_i &= \frac{dy_i}{dt} + \gamma x_i - \alpha z_i + v, \\ \zeta'_i &= \frac{dz_i}{dt} + \alpha y_i - \beta x_i + w, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

de ontbondenen van de volstreckte snelheid volgens oogenblikkelijk vaste assen. Voor de bepaling van de levende kracht is het onverschillig, of deze assen op elk oogenblik een anderen stand toegeschreven moet worden, en dus

$$T^{(a)} = \sum \frac{m}{2} \{ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \}, \dots \dots \dots (47)$$

wanneer hierin (46) wordt gesubstitueerd.

De differentiaalvergelijkingen van de betrekkelijke beweging in den tweeden vorm van LAGRANGE zijn dus volgens (11)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T^{(a)} + U^{(a)})}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial (T^{(a)} + U^{(a)})}{\partial q_i} \dots \dots \dots (48)$$

Tot op dit punt werd het onderzoek door LOTTNER<sup>1)</sup> gebracht. Met (12), (13), (14) kan men echter terstond ook de canonische vergelijkingen aangeven. Ter onderscheiding zullen wij schrijven

$$p_i^{(a)} = \frac{\partial (T^{(a)} + U^{(a)})}{\partial \dot{q}_i} \dots \dots \dots (49)$$

$$H^{(a)} = [\sum p_i^{(a)} \dot{q}_i - T^{(a)} - U^{(a)}]_{p^{(a)} q}, \dots \dots \dots (50)$$

waar  $[\ ]_{p^{(a)} q}$  aanduidt, dat de grootheid tusschen  $[\ ]$  in de  $p_i^{(a)}$  en de  $q_i$  moet worden uitgedrukt. De canonische differentiaalvergelijkingen zijn dan

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H^{(a)}}{\partial p_i^{(a)}}, \dots \dots \dots (51)$$

<sup>1)</sup> Journ. v. Crelle, Bd. 54.

$$\frac{dp_i^{(a)}}{dt} = - \frac{\partial H^{(a)}}{\partial q_i} \dots \dots \dots (52)$$

7. Wij willen deze vergelijkingen (48), (51), (52) vergelijken met de overeenkomstige

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (T^{(r)} + U^{(r)})}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\partial}{\partial q_i} (T^{(r)} + U^{(r)}), \dots \dots (53)$$

en

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(r)} &= \frac{\partial (T^{(r)} + U^{(r)})}{\partial \dot{q}_i}, \\ \frac{\partial H^{(r)}}{\partial p_i^{(r)}} &= \frac{dq_i}{dt}, \quad \frac{\partial H^{(r)}}{\partial q_i} = - \frac{dp_i^{(r)}}{dt}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (54)$$

waaraan nog (33) of (36) toegevoegd moet worden, en die wij in de vorige § vonden.

Volgens (45)

$$\begin{aligned} T^{(a)} = \sum_i \frac{m_i}{2} \{ \dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2 \} + \sum m_i \{ \xi_i u + \eta_i v + \zeta_i w \} + \\ + \sum \frac{m}{2} (u^2 + v^2 + w^2), \end{aligned}$$

en volgens (42), (9), (7), (6) en (10),

$$\begin{aligned} T^{(a)} + U^{(a)} = T^{(r)} + U^{(r)} - K + \sum m_i \left( \frac{dx_i}{dt} u + \frac{dy_i}{dt} v + \frac{dz_i}{dt} w \right) + \\ + \sum \frac{m_i}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \\ + \sum m_i \{ (\gamma v - \beta w) x_i + (\alpha w - \gamma u) y_i + (\beta u - \alpha v) z_i \}. \end{aligned}$$

Past men de verg. (4) toe op den oorsprong der coördinaten, waarvoor  $x_i = y_i = z_i = \dot{x}_i = \dot{y}_i = \dot{z}_i = X_i = Y_i = Z_i = 0$  is, zoo komt, gelijk men ook gemakkelijk onmiddellijk inzielt,

$$u' = \frac{du}{dt} + \beta w - \gamma v,$$

$$v' = \frac{dv}{dt} + \gamma u - \alpha w,$$

$$w' = \frac{dw}{dt} + \alpha v - \beta u.$$

Nu willen wij stellen

$$K_0 = \sum m_i (x_i u + y_i v + z_i w), \dots \dots \dots (55)$$

$$K_1 = \sum \frac{m_i}{2} (u^2 + v^2 + w^2); \dots \dots \dots (56)$$

dan wordt met (6)

$$T^{(a)} + U^{(a)} = T^{(r)} + U^{(r)} + \frac{dK_0}{dt} + K_1 \dots \dots (57)$$

$K_0$  heeft ten opzichte van de snelheid van voortgaande beweging dezelfde beteekenis als de vroeger ingevoerde  $-K$  (zie (6)) ten opzichte van de versnelling van voortgaande beweging.  $K_1$  is voor de differentiaalvergelijkingen zonder beteekenis, maar heeft overigens ten opzichte van de snelheid van voortgaande beweging dezelfde beteekenis als  $G$  ten opzichte van de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel. Uit (57), (49) en (54) volgt

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(a)} &= p_i^{(r)} + \sum_i m_i \left( \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} u + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_i} v + \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_i} w \right), \\ p_i^{(a)} &= p_i^{(r)} + \frac{\partial K_0}{\partial q_i}; \end{aligned} \right\} (58)$$

want volgens (19) is  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}$ .

Eindelijk met (50) en (58)

$$H^{(a)} = [H^{(r)}]_{p^{(a)}_q} - \frac{\partial K_0}{\partial t} - K_1 \dots \dots (59)$$

Wanneer men let op (57), (58), (59) bij de vergelijking van (48), (51) en (52) eenerzijds met (53) en (54) anderzijds, zoo zijn deze, vooral wanneer  $U^{(a)}$  eene functie der  $\dot{q}$  is, schijnbaar verschillend. Maar dat (48) en (53) volkomen dezelfde beteekenis hebben, blijkt terstond uit

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{dK_0}{dt} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_0}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{dK_0}{dt} \right).$$

Zoodra men de aangeduide substitutien uitgevoerd heeft, worden ook de canonische vergelijkingen van geheel dezelfde beteekenis. Inderdaad ontstaat  $H^{(a)}$  uit  $H^{(r)}$ , door dat men in het laatste  $p_i^{(a)} - \frac{\partial K_0}{\partial q_i}$  in plaats van  $p_i^{(r)}$  schrijft, en er  $-K_1 - \frac{\partial K_0}{\partial t}$  aan toevoegt. Dus is

$$- \frac{\partial H^{(a)}}{\partial q_i} = - \left[ \frac{\partial H^{(r)}}{\partial q_i} \right]_{p^{(a)}_q} + \sum_k \frac{\partial H^{(a)}}{\partial p_k^{(a)}} \frac{\partial^2 K_0}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial^2 K_0}{\partial q_i \partial t},$$

en met (51)

$$\frac{\partial H^{(a)}}{\partial q_i} = \left[ \frac{\partial H^{(r)}}{\partial q_i} \right]_{p^{(a)}_q} - \sum_k \frac{\partial^2 K_0}{\partial q_i \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial^2 K_0}{\partial t \partial q_i};$$

of (52) wordt

$$\frac{d}{dt} \left( p_l^{(a)} - \frac{\partial K_0}{\partial q_l} \right) = - \left[ \frac{\partial H^{(r)}}{\partial q_l} \right]_{p^{(a)}, q} \dots \dots (60)$$

Hier onderscheidt zich de grootheid tusschen [ ] slechts daardoor van dezelfde zonder [ ], dat in plaats van  $p_l^{(r)}$  in de eerste overal  $p_l^{(a)} - \frac{\partial K_0}{\partial q_l}$  staat.

Maar de vergelijking (51) laat zich schrijven

$$\frac{dq_l}{dt} = \left[ \frac{\partial H^{(r)}}{\partial p_l^{(r)}} \right]_{p^{(a)}, q}, \dots \dots \dots (61)$$

die eveneens van (54) slechts daardoor verschilt, dat in plaats van  $p^{(r)}$  overal weder  $p_l^{(a)} - \frac{\partial K_0}{\partial q_l}$  staat.

Met (58) worden dus de formules, gevonden in § 1 en in deze § identisch, ofschoon zij schijnbaar verschilden.

8. De grond hiervan ligt daarin, dat bij dezelfde krachten meer dan ééne SCHERING'sche krachtfunctie behooren kan. Want daar deze alleen aan de vergelijking (8) behoeft te voldoen, mag men bij elke SCHERING'sche krachtfunctie  $U$  eene zoodanige  $U'$  voegen, dat

$$\delta U' - \frac{d}{dt} \sum_m \frac{\partial U'}{\partial \dot{\xi}_m} \delta \xi_m = 0,$$

voor alle met de voorwaardevergelijkingen bestaanbare verplaatsingen geldt. Door het invoeren van de  $q_l$  in plaats van de opeenvolgend met  $\xi_m$  aangeduide coördinaten, gaat deze vergelijking in het stelsel van

$$\frac{\partial U'}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U'}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0 \dots \dots \dots (62)$$

voor elke  $l$  over. Functiën, die voldoen aan deze vergelijkingen, zijn bijv. eene standvastige en eene functie van den tijd alleen, zooals  $K_1$ .

De theorie van de betrekkelijke beweging biedt ons, daar  $\frac{dK_0}{dt}$  volgens het voorgaande aan (62) voldoet, een eenvoudig en opmerkelijk voorbeeld van twee SCHERING'sche krachtfunctiën voor dezelfde krachten aan, wier verschil eene den tijd, de coördinaten en de snelheden bevattende functie is.

Als tweede SCHERING'sche krachtfunctie van de nevenkrachten van CORIOLIS vindt men uit deze § dus het verschil van de levende krachten, berekend uit de snelheden in

de volstreckte en uit de snelheden in de betrekkelijke beweging.

En dit is terstond in te zien, omdat men, wegens de symmetrie van de vergelijkingen van SCHERING ten opzichte van de levende kracht en de krachtfunctie, willekeurige deelen van de eerste als tot de tweede behoorende kan beschouwen.

§ 3. *De storingsfunctie voor de betrekkelijke beweging. Uitbreiding van de storingsvergelijkingen van SCHERING.*

9. In § 1 hebben wij voor het geval, dat de krachtfunctie de snelheden niet, of linear, bevat voor de storingsfunctie, volgens (38) en (34), gevonden

$$S = -K - G - L_{p'} + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \dots \quad (63)$$

Men kan in de storingsfunctie in plaats van  $L_{p'}$ , eenvoudig  $L$  schrijven, want  $L_{p'}$ , verkrijgt men door in  $L$  voor de  $\dot{q}$  hunne waarden in de  $p'$  van de ongestoorde beweging uitgedrukt te schrijven.

Daar echter de storingsfunctie met behulp van de integralen der ongestoorde beweging moet worden uitgedrukt, is het onverschillig of men terstond de  $q'$  in  $L$  in de elementen, of de  $\dot{q}$  eerst in de  $p'$ , en deze dan met behulp van de integraalvergelijkingen in de elementen uitdrukt.

$$\frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)}$$

kan, evenals  $G$  (zie n°. 2), worden opgevat als eene levende kracht; namelijk als die, welke behoort bij de snelheidsverdeeling, bepaald door

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = p_r,$$

d. i. door

$$\begin{aligned} \dot{q}_r = & \sum_i \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} m_i \left[ \alpha \left( y_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} - z_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \right) + \right. \\ & \left. + \beta \left( z_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} - x_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) + \gamma \left( x_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} - y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \right) \right]. \end{aligned}$$

Bij deze snelheidsverdeeling is tevens de levende kracht gelijk de halve overeenkomstige grootheid  $L$ . Men kan eindelijk aan

$$G = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)}$$

een anderen merkwaardigen vorm geven. Volgens (9) is

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= m_i(\beta z_i - \gamma y), & \frac{\partial L}{\partial y_i} &= m_i(\gamma x_i - \alpha z_i), \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} &= m_i(\alpha y_i - \beta x_i); \end{aligned}$$

dus met (7) ook

$$G = \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial L}{\partial y_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial L}{\partial z_i} \right)^2 \right\}.$$

Wanneer men nu die functiën der  $x_i, y_i, z_i$ , welke volgens de voorwaardevergelijkingen standvastig zijn, van deze beperking afziende, aan de  $q$  toevoegt, zoo verkrijgt men een stel onafhankelijke coördinaten, in aantal gelijk aan dat der rechthoekige; en is geheel algemeen

$$G = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial q_s}{\partial x_i} \frac{\partial q_r}{\partial x_i} + \frac{\partial q_s}{\partial y_i} \frac{\partial q_r}{\partial y_i} + \frac{\partial q_s}{\partial z_i} \frac{\partial q_r}{\partial z_i} \right).$$

Vormen wij nu als in (21) de verdere  $(r.s)$ , waartoe de toevoeging der nieuwe  $q$  aanleiding geeft, en noemen wij eindelijk als in (24) de determinante, uit al de  $(r.s)$ ,  $D$ ; dan is

$$\sum_i \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial q_r}{\partial x_i} \frac{\partial q_s}{\partial x_i} + \frac{\partial q_r}{\partial y_i} \frac{\partial q_s}{\partial y_i} + \frac{\partial q_r}{\partial z_i} \frac{\partial q_s}{\partial z_i} \right) = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)}, \quad (64)$$

zooals wij later bewijzen zullen, en wordt

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \left[ \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} - \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \right] \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \dots \quad (65) \end{aligned}$$

waar rechts over het geheele aangevulde stelsel der onafhankelijke coördinaten moet worden gesommeerd, en de subdeterminanten van  $D$  voor alle waarden van  $r$  en  $s$ , die op de voorwaardevergelijkingen betrekking hebben, gelijk 0 zijn.

Voor een stelsel van vrije punten is  $D \equiv D$ , en is dit deel van de storingsfunctie dus nul; zoodat alleen het eerste

$$S = -(K+L) \dots \dots \dots (66)$$

overblijft, dat door de eenvoudige meetkundige beteekenis van  $K$  en  $L$  uiterst eenvoudig van vorm en beteekenis is.

Het tweede gedeelte van de storingsfunctie, dat van de voorwaardevergelijkingen afhangt, is, zooals wij in Hoofdstuk III aan zullen

tooncn, bijv. ook nul voor het geval van een vast onveerkrachtig lichaam, dat vrij om een punt kan draaien. Voor een cardanisch opgehangen slinger zullen wij echter in Hoofdstuk III zien, dat het niet nul, maar onafhankelijk is van de ontbondene der draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel volgens het vaste mes van den slinger.

Merkt men nog op, dat het eerste deel van de storingsfunctie ten opzichte van  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  van den eersten, het tweede van den tweeden graad is, zoo blijkt, dat de storingen van de eerste orde, die de beweging der coördinatenassen in de beweging van een gegeven stelsel van stoffelijke punten ten opzichte van deze brengt, steeds, alsof die punten geheel vrij waren, bepaald worden door de uiterst eenvoudige storingsfunctie  $-(K+L)$ , en dat de beperking van de beweging dier punten door voorwaardevergelijkingen slechts tot de toevoeging van eene, van die voorwaarden afhankelijke, storingsfunctie van de tweede orde aanleiding geeft.

10. Wij zullen nu (64) bewijzen, hetgeen met behulp van bekende stellingen over de determinanten gemakkelijk is.

De  $3n$  coördinaten  $x_1 \dots x_{3n}$ , elk vermenigvuldigd met den vierkantswortel uit de bijbehorende massa, duiden wij door  $\xi_1 \dots \xi_{3n}$  aan; — zoodat

$$\xi_1 = \sqrt{m_1} x_1, \quad \xi_2 = \sqrt{m_1} y_1, \quad \xi_3 = \sqrt{m_1} z_1, \quad \xi_4 = \sqrt{m_2} x_2, \\ \xi_{3n} = \sqrt{m_n} z_n, \quad -$$

en de onafhankelijke coördinaten,  $3n$  functiën van deze  $\xi$ , door  $q_1 \dots q_{3n}$ . Verder vormen wij de functionaaldeterminante

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{3n}} & \dots & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{3n}} \end{vmatrix}.$$

Dan is

$$\frac{\partial q_r}{\partial \xi_i} = \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r}};$$

$$\text{dus} \quad \sum_i \frac{\partial q_r}{\partial \xi_i} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_i} = \frac{1}{Q^2} \sum_i \frac{\partial Q}{\partial \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r}} \frac{\partial Q}{\partial \frac{\partial \xi_i}{\partial q_s}}.$$

Laat nu  $(r, s)$  en  $D$  in de beteekenis, die wij er bij (65) aan hechtten, gebezigd worden, zoo is  $D$  wat BALTZER (Determin. 4<sup>e</sup> Aufl. pg. 46) de determinante van het gecomponeerde stelsel

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{3n}} & \\ & & & \ddots \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{3n}} & \\ & & & \ddots \end{array} \right|$$

noemt. Zij is het vierkant van de determinante van elk dezer stelsels afzonderlijk, dus

$$D = Q^2.$$

Dus is wegens

$$(r, s) = \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_s},$$

afgezien van het teeken,

$$\frac{\partial D}{\partial (r, s)}$$

de determinante uit het gecomponeerde stelsel

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{r+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{r+1}} & \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{r+2}} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{r-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{r-1}} & \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{s+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{s+1}} & \\ & & & \\ & & & \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{s-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{s-1}} & \end{array} \right|,$$

waar in elk stelsel het aantal regels een minder is dan het aantal kolommen en in elke kolom de wijzers der  $q$  van  $r+1$  tot  $r-1$  cyclisch op elkander volgen. Deze determinante is de som van al die producten

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \xi_t}{\partial q_{r+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_w}{\partial q_{r+1}} & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial q_{r-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_w}{\partial q_{r-1}} & \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \xi_t}{\partial q_{s-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_w}{\partial q_{s-1}} & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial q_{s-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_w}{\partial q_{s-1}} & \end{array} \right|,$$

welke men verkrijgt, wanneer men voor de kolommen wijzers  $t \dots w$ , de verbindingen  $3n-1$  aan  $3n-1$  uit de  $3n$  mogelijke wijzers

neemt, en die dus  $3n$  in aantal zijn. Het teeken, dat aan deze som van producten moet worden gegeven, is  $+$  of  $-$ , al naar dat  $r, r+1, \dots, r-1$ , en  $s, s+1, \dots, s-1$ , verschikkingen van dezelfde of van verschillende klasse van de rangnummers van het stelsel zijn. In elk enkel product, waar het element  $i$  niet onder de  $t, w \dots$  voorkomt, kan men in elk der beide factoren de kolommen zoo verwisselen, dat de kolomnummers cyclisch op elkaar volgen als  $i+1, i+2, \dots, i-1$ ; dit geeft in het teeken van het product, daar in beide factoren dezelfde verwisseling plaats grijpt, geene verandering; daarom kan de som van de producten geschreven worden

$$\sum_{i=1}^{i=3n} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial q_{r+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{i-1}}{\partial q_{r+1}} \\ \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial q_{r-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{i-1}}{\partial q_{r-1}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial q_{s+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{i-1}}{\partial q_{s+1}} \\ \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial q_{s-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{i-1}}{\partial q_{s-1}} \end{vmatrix}.$$

Nu is echter de bepaling, dat het teeken van deze som  $+$  of  $-$  genomen worden moet, al naar mate  $r, r+1, \dots, r-1$ , en  $s, s+1, \dots, s-1$ , verschikkingen van dezelfde of verschillende klassen zijn, hetzelfde als dat aan elke factor van elk product het teeken  $+$  of  $-$  gegeven wordt, al naar mate  $i, i+1, \dots, i-1$ , en  $r, r+1, \dots, r-1$ , respectie  $s, s+1, \dots, s-1$ , en  $i, i+1, \dots, i-1$ , verschikkingen van dezelfde of verschillende klasse zijn. Met dit teeken wordt echter, volgens de bekende vorming van de subdeterminanten uit  $Q$ , elke factor tot de adjuncte van die  $\frac{\partial \xi_i}{\partial q_r}$ , waarvan  $i$  en  $r$  in hem niet voorkomen.

De bovenstaande som wordt dus

$$\sum_i \frac{\partial Q}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q}{\partial q_s};$$

dus

$$\sum_i \frac{\partial q_r}{\partial \xi_i} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_i} = \frac{1}{Q^2} \sum_i \frac{\partial Q}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q}{\partial q_r} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)},$$

wat bewezen moest worden.

11. Wij zullen hier nog aangeven, welken vorm de canonische storingsvergelijkingen, die SCHERING uitgebreid heeft tot het geval, dat zijne krachtfunctie de snelheden bevat, aannemen, wanneer nog andere storende krachten (bij de bepaling van de betrekkelijke beweging

bijv.) in aanmerking genomen moeten worden, die men niet in de SCHERING'sche krachtfunctie  $\mathcal{V}$  (zie (8)) opnemen kan, of niet opgenomen heeft. Laat deze storende krachten op het punt  $m_i$ ,  $X_i^{(s)}$ ,  $Y_i^{(s)}$ ,  $Z_i^{(s)}$  zijn, en hieruit

$$Q_r^{(s)} = \sum_i \left( X_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i^{(s)} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i^{(s)} \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right)$$

gevormd worden. Dan moeten de differentiaalvergelijkingen voor  $\phi$ ,  $\psi$  deze als functiën van  $t$  zoo bepalen, dat aan

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{dq_r}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} = -\frac{dp_r}{dt} + Q_r^{(s)}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$$

voldaan wordt.  $\phi$  en  $\psi$  zijn weder de in (16) bepaalde functiën van  $p$  en  $q$ , d. w. z. de integralen van het ongestoorde vraagstuk  $E$ . Identisch is

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \sum_r \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \frac{dq_r}{dt} + \sum_r \frac{\partial \psi}{\partial p_r} \frac{dp_r}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = \\ &= \sum_r \left( \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \psi}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_r \frac{\partial \psi}{\partial p_r} Q_r^{(s)}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \sum_r \left( \frac{\partial \phi}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \phi}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_r \frac{\partial \phi}{\partial p_r} Q_r^{(s)}. \end{aligned}$$

Volgens formules, die ik eenvoudig aan de verhandeling van SCHERING zal ontleenen, namelijk die aldaar met [15] aangegeven zijn<sup>1)</sup>, is echter

$$\begin{aligned} \sum_r \left( \frac{\partial \psi}{\partial p_r} \frac{\partial E}{\partial q_r} - \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \frac{\partial E}{\partial p_r} \right) &= \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ \sum_r \left( \frac{\partial \phi}{\partial p_r} \frac{\partial E}{\partial q_r} - \frac{\partial \phi}{\partial q_r} \frac{\partial E}{\partial p_r} \right) &= \frac{\partial \phi}{\partial t}; \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \sum_r \left( \frac{\partial(H-E)}{\partial p_r} \frac{\partial \psi}{\partial q_r} - \frac{\partial(H-E)}{\partial q_r} \frac{\partial \psi}{\partial p_r} \right) + \sum_r \frac{\partial \psi}{\partial p_r} Q_r^{(s)}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \sum_r \left( \frac{\partial(H-E)}{\partial p_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} - \frac{\partial(H-E)}{\partial q_r} \frac{\partial \phi}{\partial p_r} \right) + \sum_r \frac{\partial \phi}{\partial p_r} Q_r^{(s)}. \end{aligned}$$

Beschouwen wij nu in de som

$$\sum_r \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} Q_r^{(s)},$$

die uit eene reeks van termen

<sup>1)</sup> L. c. *Abhandl. der math. Classe*. Bd. XVIII. S. 45.

$$X_l^{(s)} \sum_r \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial x_l}{\partial q_r}$$

bestaat, een van deze. Hiervoor kan ook geschreven worden

$$X_l^{(s)} \sum_r \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial x_l}{\partial q_r} - \frac{\partial \psi_m}{\partial q_r} \frac{\partial x_l}{\partial p_r} \right),$$

daar  $x$  onafhankelijk van  $p$  is; of ook

$$X_l^{(s)} \sum_k \left\{ \sum_r \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial \psi_k}{\partial q_r} - \frac{\partial \psi_m}{\partial q_r} \frac{\partial \psi_k}{\partial p_r} \right) \frac{\partial x_l}{\partial \psi_k} + \right. \\ \left. + \sum_r \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_r} - \frac{\partial \psi_m}{\partial q_r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_r} \right) \frac{\partial x_l}{\partial \Phi_k} \right\};$$

of, daar, volgens de bij SCHEERING eveneens met [15] aangegeven vergelijkingen,

$$\sum_r \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial \psi_k}{\partial q_r} - \frac{\partial \psi_m}{\partial q_r} \frac{\partial \psi_k}{\partial p_r} \right) = 0, \\ \sum_r \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_r} - \frac{\partial \psi_m}{\partial q_r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_r} \right) = 0, \text{ voor } k \leq l,$$

maar  $\sum_r \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_r} - \frac{\partial \psi_m}{\partial q_r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_r} \right) = -1$ , voor  $k = m$   
is,

$$X_l^{(s)} \sum_r \frac{\partial \psi_m}{\partial p_r} \frac{\partial x_l}{\partial q_r} = - X_l^{(s)} \frac{\partial x_l}{\partial \Phi_m}.$$

Het overige eveneens behandelende, komt er

$$\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{\partial(H-E)}{\partial \Phi_m} - \sum_l \left[ X_l^{(s)} \frac{\partial x_l}{\partial \Phi_m} + Y_l^{(s)} \frac{\partial y_l}{\partial \Phi_m} + Z_l^{(s)} \frac{\partial z_l}{\partial \Phi_m} \right]; \quad (67)$$

en, met eene laatste vergelijking van het stelsel [15] in de verhandeling van SCHEERING,

$$\sum_r \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_r} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_r} \right) = 0,$$

evenzoo

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{\partial(H-E)}{\partial \psi_m} + \sum_l \left[ X_l^{(s)} \frac{\partial x_l}{\partial \psi_m} + Y_l^{(s)} \frac{\partial y_l}{\partial \psi_m} + Z_l^{(s)} \frac{\partial z_l}{\partial \psi_m} \right]. \quad (68)$$

Deze uitbreiding van SCHEERINGS theorie, die wij toe zullen passen op de berekening van den invloed der wrijving bij onze slingerproeven, levert dus niet de minste moeilijkheid op.

Heeft men de storende krachten, afkomstig van de beweging van het coördinatenstelsel bij een vraagstuk over betrekkelijke beweging, waarvoor de karakteristieke functie, afgezien van de beweging der

coördinatenassen,  $E$  zou zijn, niet in de krachtfunctie opgenomen, en komen er geene andere storende krachten voor, zoo zijn  $X_l^{(s)}$ ,  $Y_l^{(s)}$ ,  $Z_l^{(s)}$ , de ontbondenen van de nevenkrachten van CORIOLIS;  $H - E$  wordt nul, en de differentiaalvergelijkingen voor de door de beweging van het coördinatenstelsel gestoorde beweging  $E$ , (67) en (68), gaan over in

$$-\frac{d\psi_m}{dt} = \sum_i \left[ X_l^{(s)} \frac{\partial x_l}{\partial \phi_m} + Y_l^{(s)} \frac{\partial y_l}{\partial \phi_m} + Z_l^{(s)} \frac{\partial z_l}{\partial \phi_m} \right],$$

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} = \sum_i \left[ X_l^{(s)} \frac{\partial x_l}{\partial \psi_m} + Y_l^{(s)} \frac{\partial y_l}{\partial \psi_m} + Z_l^{(s)} \frac{\partial z_l}{\partial \psi_m} \right].$$

Deze vergelijkingen zijn inderdaad door DUMAS<sup>1)</sup> gebruikt om de beweging van den enkelvoudigen slinger met inachtneming van de draaiing der aarde na te gaan. Daarentegen hebben HANSEN<sup>2)</sup> en POISSON op vraagstukken van beweging aan 't aardoppervlak de gewone theorie van de variatie der standvastigen bij differentiaalvergelijkingen toegepast, zonder de vereenvoudiging, die de theorie van HAMILTON-JACOBI veroorlooft.

§ 4. *Over het beginsel van den laatsten multiplicator in de betrekkelijke beweging.*

12. Het nut van de beginselen van de levende kracht, van de beweging van het zwaartepunt, en van de perken voor de integratie van de differentiaalvergelijkingen der betrekkelijke beweging van een willekeurig stelsel stoffelijke punten in een rechthoekig coördinatenstelsel, dat de meest algemeene beweging van een vast, onveerkrachtig lichaam bezit, heeft CORIOLIS aangeduid. Van deze beginselen blijft alleen dat van de levende kracht in het algemeen voor de betrekkelijke beweging geldig. In het volgende zal ik aantoonen, dat ook het beginsel van den laatsten multiplicator, wanneer het, zonder hulp van de integraalvergelijkingen der beweging, geldt, deze gewichtige eigenschap bezit.

In de XVII *Vorlesung über Dynamik* heeft JACOBI den multiplicator bepaald voor de differentiaalvergelijkingen (1). Daarbij onderstelt hij stilzweigend, dat de  $\phi_r$  in (2) den tijd niet bevatten. Terwijl wij voorloopig aan de eveneens door hem ingevoerde beperking, dat de

<sup>1)</sup> *Journal von Crelle*. Bd. 50.

<sup>2)</sup> *Neue Schriften der Danziger Gesellschaft*. Bd. 5.

$X_i, Y_i, Z_i$  de snelheden niet bevatten moeten, vasthouden, willen wij ons van deze onwezenlijke veronderstelling bevrijden. Noemen wij de coördinaten op elkaar volgend  $\xi_l$ , de krachtontbondenen  $\Xi_l$ , de daarbij hoorende massa's  $\mu_l$ , zoodat

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= x_1, \xi_2 = y_1, \xi_3 = z_1, \xi_4 = x_2, \dots, \xi_{3n} = z_n, \\ \Xi_1 &= X_1, \Xi_2 = Y_1, \Xi_3 = Z_2, \Xi_4 = X_2, \dots, \Xi_{3n} = Z_n, \\ \mu_1 &= m_1, \mu_2 = m_1, \mu_3 = m_1, \mu_4 = m_2, \dots, \mu_{3n} = m_n, \end{aligned} \right\} (68)$$

zoo gaan de vergelijkingen (1) over in

$$\ddot{\xi}_l = \frac{d\dot{\xi}_l}{dt}, \mu_l \frac{d\dot{\xi}_l}{dt} = \Xi_l + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l}, \Phi_r = 0 \dots (69)$$

Het beginsel van den laatsten multiplicator geldt, wanneer

$$\sum_l \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \Xi_l}{\partial \dot{\xi}_l} + \sum_l \sum_r \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \lambda_r}{\partial \dot{\xi}_l} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} = F = \sum_l \sum_r \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \lambda_r}{\partial \dot{\xi}_l} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} (70)$$

een volledig differentiaalquotient naar den tijd is, en de multiplicator  $M$  van (69) wordt dan bepaald door

$$\frac{d \lg M}{dt} + F = 0 \dots \dots \dots (71)$$

Om  $F$  te bepalen moeten wij de  $\frac{\partial \lambda_r}{\partial \dot{\xi}_l}$  vinden. Elk der vergelijkingen  $\Phi_r = 0$  geeft, tweemaal achtereenvolgens naar den tijd gedifferentieerd, eene vergelijking van den vorm

$$\sum_l \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \ddot{\xi}_l + 2 \sum_l \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial t} \dot{\xi}_l + \sum_l \sum_m \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial \xi_m} \dot{\xi}_l \dot{\xi}_m = 0, \dots (72)$$

en het symbool

$$[r.s] = \sum_l \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_l} \dots \dots \dots (73)$$

bij de substitutie van (69) in (72) invoerende, gaan deze over in

$$\sum_s [r.s] \lambda_s + 2 \sum_l \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial t} \dot{\xi}_l + \sum_l \sum_m \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial \xi_m} \dot{\xi}_l \dot{\xi}_m + \sum_l \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \Xi_l = 0; (74)$$

duis, naar  $\dot{\xi}_l$  differentieerende,

$$\sum_s [r.s] \frac{\partial \lambda_s}{\partial \dot{\xi}_l} + 2 \sum_m \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial \xi_m} \dot{\xi}_m + 2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial t} = 0 \dots (75)$$

Dit zijn dezelfde vergelijkingen als

$$\sum_s [r.s] \frac{\partial \lambda_s}{\partial \xi_l} + 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \right) = 0, \dots \dots (76)$$

die JACOBI, bl. 137 van zijne *Vorlesungen*, verkrijgt in de onderstelling, dat de  $\Phi_r$  van  $t$  vrij zijn. Vormen wij nu met JACOBI de determinante uit de  $[r.s]$ ,  $\Delta$ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} [1.1] & \dots & [1.m] \\ \vdots & & \vdots \\ [r.s] & & \\ \vdots & & \vdots \\ [m.1] & \dots & [m.m] \end{vmatrix}, \dots \dots \dots (77)$$

die wegens  $[r.s] = [s.r]$  de eigenschap

$$\frac{\partial \Delta}{\partial [r.s]} = \frac{\partial \Delta}{\partial [s.r]} \dots \dots \dots (78)$$

heeft, en als eene som van vierkanten kan worden voorgesteld; zoo komt er

$$-\Delta \frac{\partial \lambda_r}{\partial \xi_l} = 2 \sum_s \frac{\partial \Delta}{\partial [r.s]} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_l} \right),$$

en volgens (70)

$$F = - \frac{2}{\Delta} \sum_l \sum_r \sum_s \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \Delta}{\partial [r.s]} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_l} \right);$$

dus, met (78) en (73) de sommatie over alle verschillende verbindingen van  $r$  en  $s$  uitstreckende,

$$F = - \frac{1}{\Delta} \sum_r \sum_s \frac{\partial \Delta}{\partial [r.s]} \frac{d}{dt} [r.s],$$

of

$$F = - \frac{d \lg \Delta}{dt},$$

en volgens (71), afgezien van een standvastigen factor,

$$M = \Delta \dots \dots \dots (79)$$

Wanneer dus de werkende krachten slechts aan de voorwaarde voldoen, dat zij de snelheden niet bevatten, geldt het beginsel van den laatsten multiplicator ook voor het geval, dat de beweging aan willekeurige voorwaardevergelijkingen, die ook den tijd bevatten mogen, gebonden is; en is de multiplicator van den eersten vergelijkingsvorm van LAGRANGE de determinante  $\Delta$ , gevormd uit die voorwaarden.

13. Beschouwen wij nu het geval, dat de krachtontbondenen  $\Xi_l$  in 't algemeen de snelheden bevatten, maar zoo, dat voor de vrije beweging der punten het beginsel van den laatsten multiplicator geldt, d. w. z.

$$\sum_l \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \Xi_l}{\partial \dot{\xi}_l} = \frac{dN}{dt}, \dots \dots \dots (80)$$

een volledig differentiaalquotient naar den tijd is. Zal men iets over de geldigheid van het bedoelde beginsel in de aan voorwaarden gebonden beweging vooruit kunnen bepalen, zoo' moet (80) onafhankelijk van de integraalvergelijkingen van het vraagstuk, die immers in de beweging van het onvrije stelsel in 't algemeen anders worden, waar zijn, en dus uit de differentiaalvergelijkingen van het vrije stelsel volgen. Anders zal in 't algemeen het beginsel van den laatsten multiplicator geene toepassing vinden, wanneer de beweging der punten aan de voorwaarden onderworpen wordt.

Met deze onderstelling verkrijgt men uit (74) in plaats van (75) de volgende

$$\sum_s [r \cdot s] \frac{\partial \lambda_s}{\partial \dot{\xi}_l} + 2 \sum_m \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial \xi_m} \dot{\xi}_m + 2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \xi_l \partial t} + \sum_m \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_m} \frac{\partial \Xi_m}{\partial \dot{\xi}_l} = 0,$$

en in plaats van (76)

$$\sum_s [r \cdot s] \frac{\partial \lambda_s}{\partial \dot{\xi}_l} + 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \right) + \sum_m \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_m} \frac{\partial \Xi_m}{\partial \dot{\xi}_l} = 0.$$

Dus wordt

$$-\Delta \frac{\partial \lambda_r}{\partial \dot{\xi}_l} = \sum_s \frac{\partial \Delta}{\partial [r \cdot s]} \left\{ 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_l} \right) + \sum_m \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_m} \frac{\partial \Xi_m}{\partial \dot{\xi}_l} \right\}.$$

Volgens (70) dus weder  $F$  vormende

$$F = \frac{dN}{dt} - \frac{d \lg \Delta}{dt} - \frac{1}{\Delta} \sum_l \sum_r \sum_s \sum_m \frac{1}{\mu_m} \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_m} \frac{\partial \Xi_m}{\partial \dot{\xi}_l} \frac{\partial \Delta}{\partial [r \cdot s]}, \quad (81)$$

hetgeen in 't algemeen geen volledig differentiaalquotient naar  $t$  is. Was dus de stelling van den laatsten multiplicator geldig voor de vrije beweging, zoo is dit in het algemeen niet meer het geval voor de onvrije.

Heeft men echter

$$\frac{\partial \Xi_m}{\partial \dot{\xi}_l} = - \frac{\partial \Xi_l}{\partial \dot{\xi}_m} \dots \dots \dots (82)$$

voor alle  $m$  en  $l$ , dus ook

$$\frac{\partial \Xi_m}{\partial \dot{\xi}_m} = 0,$$

zoo is weer volgens (78), (81), (82)

$$F = - \frac{d \lg \Delta}{dt};$$

en omdat  $\frac{dN}{dt}$  nul is,  $M = \Delta$ .

Een voorbeeld hiervan is de betrekkelijke beweging, wanneer, afgezien van de beweging van het coördinatenstelsel, voor elke  $m$  en  $l$

$$\frac{\partial \Xi_m}{\partial \dot{\xi}_l} = 0, \quad \frac{\partial \Xi_l}{\partial \dot{\xi}_l} = 0$$

is, en dus het beginsel van den laatsten multiplicator voor de vrije beweging der punten onafhankelijk van de integraalvergelijkingen zou gelden.

14. Voor de meer nauwkeurige beschouwing van den multiplicator in de betrekkelijke beweging zullen wij echter tot (1) en (5) terugkeeren. Het bedoelde beginsel gelde weder voor (1) zonder hulp van hunne integralen, dus zij

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial X_i}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial Z_i}{\partial \dot{z}_i} \right) + \sum_r \frac{1}{m_i} \left[ \frac{\partial \lambda_r}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \lambda_r}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} + \frac{\partial \lambda_r}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \right] = A \dots \dots (83) \end{aligned}$$

een volledig differentiaalquotient naar den tijd. Dit geval sluit het vorige als bijzonder geval in zich. Zal hetzelfde voor de vergelijkingen (5) het geval zijn, zoo moet

$$\begin{aligned} A + \sum_i \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial X_i^e}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial Y_i^e}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial Z_i^e}{\partial \dot{z}_i} \right) + \\ + 2 \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\gamma \dot{y}_i - \beta \dot{z}_i) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} (\alpha \dot{z}_i - \gamma \dot{x}_i) + \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} (\beta \dot{x}_i - \alpha \dot{y}_i) \right\} + \\ + \sum_i \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_r (\lambda'_r - \lambda_r) \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} \sum_r (\lambda'_r - \lambda_r) \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} \sum_r (\lambda'_r - \lambda_r) \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \right\}, \end{aligned}$$

dus met (83) en omdat  $X_i^e$ ,  $Y_i^e$ ,  $Z_i^e$  de snelheden niet bevatten,

$$B = \sum_i \frac{1}{m_i} \sum_r \left[ \frac{\partial(\lambda'_r - \lambda_r)}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial(\lambda'_r - \lambda_r)}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} + \frac{\partial(\lambda'_r - \lambda_r)}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \right] \dots \dots \dots (84)$$

een volledig differentiaalquotient naar den tijd zijn. Dit is het geval, want het is gemakkelijk te bewijzen, dat

$$B = 0 \dots \dots \dots (85)$$

Immers wanneer wij de vergelijkingen, die door tweemaal herhaalde differentiatie der  $\Phi_r = 0$  naar den tijd ontstaan,

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \ddot{z}_i \right\} + \Phi_r = 0$$

schrijven, waar  $\Phi_r$  de tweede differentiaalquotienten van de coördinaten naar den tijd niet bevat, en weder  $[r.s]$  invoeren, waarvoor (73) nu tot

$$[r.s] = \sum_i \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi_s}{\partial z_i} \right)$$

wordt, zoo zijn de vergelijkingen ter bepaling van  $\lambda'_r$  en  $\lambda_r$

$$\begin{aligned} \Phi_r + \sum_i \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} Y_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} Z_i \right\} + \sum_s \lambda_s [r.s] &= 0, \\ \Phi_r + \sum_i \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} (X_i + X_i^e) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} (Y_i + Y_i^e) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} (Z_i + Z_i^e) \right\} + \\ + \sum_s \lambda'_s [r.s] + 2 \sum_i \left\{ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} (\gamma \dot{y}_i - \beta \dot{z}_i) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} (\alpha \dot{z}_i - \gamma \dot{x}_i) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} (\beta \dot{x}_i - \alpha \dot{y}_i) \right\} &= 0; \end{aligned}$$

en dus die ter bepaling van  $\lambda'_r - \lambda_r$

$$\begin{aligned} 0 = \Lambda_r + \sum_s (\lambda'_s - \lambda_s) [r.s] + 2 \sum_i \left\{ \left( \beta \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} - \gamma \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} \right) \dot{x}_i + \right. \\ \left. + \left( \gamma \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} - \alpha \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \right) \dot{y}_i + \left( \alpha \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} - \beta \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} \right) \dot{z}_i \right\}, \end{aligned}$$

waar  $\Lambda_r$  de snelheden niet bevat. Dus met (77)

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda'_r - \lambda_r) = \Lambda'_r + 2 \sum_s \sum_i \left\{ \dot{x}_i \left( \gamma \frac{\partial \Phi_s}{\partial y_i} - \beta \frac{\partial \Phi_s}{\partial z_i} \right) + \right. \\ \left. + \dot{y}_i \left( \alpha \frac{\partial \Phi_s}{\partial z_i} - \gamma \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} \right) + \dot{z}_i \left( \beta \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} - \alpha \frac{\partial \Phi_s}{\partial y_i} \right) \right\} \frac{\partial \Delta}{\partial [r.s]}, \end{aligned}$$

waar  $\Lambda'$ , weder de snelheden niet bevat. Nu kunnen wij  $B$  vormen. Voor elke  $i$  is

$$\begin{aligned} & \sum_r \left[ \frac{\partial(\lambda'_r - \lambda_r)}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial(\lambda'_r - \lambda_r)}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} + \frac{\partial(\lambda'_r - \lambda_r)}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \right] = \\ & = \frac{2}{\Delta} \sum_{r,s} \left\{ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} \left( \gamma \frac{\partial \Phi_s}{\partial y_i} - \beta \frac{\partial \Phi_s}{\partial z_i} \right) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} \left( \alpha \frac{\partial \Phi_s}{\partial z_i} - \gamma \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \left( \beta \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} - \alpha \frac{\partial \Phi_s}{\partial y_i} \right) \right\} \frac{\partial \Delta}{\partial [r,s]} = 0; \end{aligned}$$

dus ook  $B$ , dat uit eene som van zulke leden bestaat; waarmede (85) bewezen is. De multiplicator voor de betrekkelijke beweging is dus dezelfde, als wanneer de coördinatenassen in rust waren.

15. Neemt men in plaats van de rechthoekige coördinaten willekeurige andere functiën  $q_s$ , van de  $x_i, y_i, z_i, t$  in gelijk aantal als de  $x_i, y_i, z_i$  in de vergelijkingen, die uit (1) door weglating van  $(r)$  ontstaan, of de  $\xi_l$  in (68), zoo komt voor (69)

$$\sum_s \frac{\partial \xi_l}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_r \sum_s \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_s \dot{q}_r + 2 \sum_m \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial q_m \partial t} \dot{q}_m = \frac{1}{\mu_l} \left( \Xi_l + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \right),$$

en  $Q'$  de determinante van de  $l_s = \frac{\partial \xi_l}{\partial q_s}$  noemende,

$$\begin{aligned} Q' \ddot{q}_s = & \sum_l \frac{\partial Q'}{\partial l_s} \frac{1}{\mu_l} \left( \Xi_l + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \right) - \sum_l \sum_k \sum_m \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial q_m \partial q_k} \dot{q}_m \dot{q}_k \frac{\partial Q'}{\partial l_s} - \\ & - 2 \sum_m \sum_i \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial q_m \partial t} \dot{q}_m \frac{\partial Q'}{\partial l_s}. \end{aligned}$$

$$\text{Uit } Q' \sum_s \frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial q_s} = \sum_s \sum_l \frac{\partial Q'}{\partial l_s} \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial}{\partial q_s} \left( \Xi_l + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial \xi_l} \right) - 2 \frac{dQ'}{dt}$$

volgt met (83) en met eene bekende eigenschap der functionaaldeterminanten, nl.

$$\frac{\partial q_s}{\partial \xi_l} = \frac{1}{Q'} \frac{\partial Q'}{\partial l_s},$$

dat ook nu

$$\sum_s \frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial q_s} = A - \frac{2}{Q'} \frac{dQ'}{dt} \dots \dots \dots (86)$$

een volledig differentiaalquotient naar den tijd is; zoodat het beginsel van den laatsten multiplicator blijft bestaan, wanneer men in de vergelijkingen, waarin (1) door weglating van  $(r)$  bij de krachtontbondenen overgaan, willekeurige  $q$ , invoert. Nemen wij nu de bewegingsvergelijkingen in den vorm

$$\ddot{q}_s = \sum_i \left( \frac{\partial q_s}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial q_s}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial q_s}{\partial z_i} \ddot{z}_i \right) + \Psi \quad . \quad (87)$$

geschreven aan, waar  $\Psi$  de  $\ddot{x}_i$ ,  $\ddot{y}_i$ ,  $\ddot{z}_i$  niet bevat; substitueert men in deze de eene keer (1) met weglating van  $(r)$ , de andere keer (5), zoo komt men in 't eerste geval op (86), in 't tweede met (84) op

$$\sum_s \frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial q_s} = A + B - \frac{2}{Q'} \frac{dQ'}{dt};$$

dus volgens (85) op denzelfden vorm; zoodat ook bij deze keuze der coördinaten de multiplicator in de betrekkelijke beweging dezelfde is, als wanneer men de beweging der coördinatenassen buiten rekening laat. Zijn de  $q_s$  zoo gekozen, dat de gezamentlijke functiën  $\phi_r$ , die volgens de voorwaardevergelijkingen in de beweging standvastig zijn, er onder voorkomen en de overige de onafhankelijke coördinaten zijn; zoo zijn (87) die vergelijkingen, welke men verkrijgt door oplossing naar de  $\ddot{q}_s$ , van de vergelijkingen in den tweeden vorm van LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s;$$

waar men in  $Q_s$ , bepaald door

$$Q_s = \sum_i m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right), \quad \dots \quad (88)$$

de waarden van  $\ddot{x}_i$  uit den eersten vergelijkingsvorm van LAGRANGE substitueeren moet. Ook voor deze blijft dus de multiplicator in de betrekkelijke beweging dezelfde, alsof de coördinatenassen in rust waren.

Beschouwen wij nu HAMILTON's vorm der bewegingsvergelijkingen. Stelt men

$$p'_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, \quad H' = [\sum_s p'_s \dot{q}_s - T]_{p', q},$$

dan zijn

$$\frac{dp'_s}{dt} = - \frac{\partial H'}{\partial q_s} + Q_s, \quad \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'_s},$$

waar  $Q_s$  weer volgens (88) bepaald moet worden, de bewegingsvergelijkingen in den vorm van HAMILTON. Voor het stelsel

$$dt : \dots : dq_s : \dots : dp'_s : \dots = 1 : \dots : \frac{\partial H'}{\partial p'_s} : \dots : \left( - \frac{\partial H'}{\partial q_s} + Q_s \right) : \dots$$

geldt het meer genoemde beginsel, wanneer

$$\sum \frac{\partial Q_s}{\partial p'_s}$$

een volledig differentiaalquotient naar den tijd is. Wij blijven door  $Q_s$ , de uitkomst van de substitutie van (1), met weglating van  $(r)$ , in (88) aanduiden, en geven met  $Q'_s$ , dat van de substitutie van (5) aan. Dan moet bewezen worden, dat

$$\sum_s \frac{\partial(Q'_s - Q_s)}{\partial p_s} = \frac{dC}{dt}$$

eene volledige afgeleide naar den tijd is. Nu is

$$Q'_s - Q_s = \sum_i \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial q_s} (\gamma \dot{y}_i - \beta \dot{z}_i) + \frac{\partial y_i}{\partial q_s} (\alpha \dot{z}_i - \gamma \dot{x}_i) + \right. \\ \left. + \frac{\partial z_i}{\partial q_s} (\beta \dot{x}_i - \alpha \dot{y}_i) \right\} + Q'_s,$$

waar in  $Q'_s$ , geene snelheden voorkomen.

Volgens (19) dus

$$\sum_s \frac{\partial(Q'_s - Q_s)}{\partial p'_s} = \sum_s \sum_i \sum_r \left\{ \gamma \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_r} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} - \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial p'_s} + \dots \right\} = 0,$$

omdat

$$\sum_r \sum_s \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_r} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} - \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial p'_s} = 0,$$

daar volgens (26) en (25)

$$\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial p'_s} = \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p'_r}$$

is, en voor de leden, met  $\beta$  en  $\alpha$  vermenigvuldigd, geheel overeenkomstige uitdrukkingen komen.

Eindelijk willen wij nog het bijzondere geval beschouwen, dat de vergelijkingen van HAMILTON afgezien van de beweging van het coördinatenstelsel in den canonischen vorm kunnen worden gebracht; dan moet (zie n<sup>o</sup>. 8), wanneer in (88) de (1), met weglating van  $(r)$ , ingevoerd worden,

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \right)$$

zijn, en is de functie  $U$ , die hieraan voldoet, de SCHERING'sche krachtfunctie voor de  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$ . Deze geeft de canonische differentiaalvergelijkingen volgens (12), (13), (14). Ofschoon men nu de vergelijkingen, die door de invoering van (5) in (88) ontstaan, ook in den canonischen vorm kan brengen, willen wij aannemen, dat dit niet geschied is; zoodat dus in plaats van (14)

$$\frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial E}{\partial q_s} + Q'_s - Q_s, \quad \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_s} \dots (89)$$

komen; waar  $E$  de karakteristieke functie voor de ongestoorde beweging is. Afgezien van de beweging van het coördinatenstelsel zou men echter (14) hebben, of

$$dt : \dots : dq_s : \dots : dp_s : \dots = 1 : \dots : \frac{\partial E}{\partial p_s} : \dots : - \frac{\partial E}{\partial q_s} : \dots,$$

voor welke het beginsel van den laatsten multiplicator steeds geldt, en wanneer men, gelijk in het vorige geval,  $Q', -Q$ , ontwikkelt

en weer opmerkt, dat ook nu  $\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial p_s} = \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_r}$  is, vindt men dat het

ook geldt voor de vergelijkingen (89).

Voor alle vormen van de bewegingsvergelijkingen vinden wij dus, dat het beginsel van den laatsten multiplicator van toepassing is op de betrekkelijke beweging, wanneer dit afgezien van de beweging der coördinatenassen zonder hulp der integralen het geval is.

---

## HOOFDSTUK II.

### DE VERSCHIJNSELEN, DIE VOOR DE BETREKKELIJKE BEWEGING DE BETEKENIS HEBBEN VAN DE FIGUREN VAN LISSAJOUS VOOR DE VOLSTREKTE.

---

§ 1. *De canonische elementen voor de figuren van LISSAJOUS. Differentiaal- en Integraalvergelijkingen voor de gestoorde elementen.*

16. Een voor natuurkundige toepassingen (zie Hoofdst. III) zeer belangrijk geval van betrekkelijke beweging, is dat van een punt  $i$ , hetwelk bij zijne beweging in een plat vlak, dat om een vast punt draait, moet blijven, en ten opzichte van de oogenblikkelijke ligging van een rechthoekig, vast met dat vlak verbonden, coördinatenstelsel der  $x, y$ , welks oorsprong in het draipunt valt, aan de werking van de krachtfunctie.

$$U^{(a)} = -\frac{1}{2}(p^2 x_i^2 + q^2 y_i^2) \dots \dots \dots (90)$$

onderworpen is, waar  $p^2$  en  $q^2$  positieve standvastigen zijn. Wij zullen dit vraagstuk volgens de methoden, die in het vorige hoofdstuk zijn uiteengezet, behandelen.

Wanneer de  $x$ ,  $y$ -assen in rust waren, zou de karakteristieke functie  $E$ , daar volgens (12)

$$q_1 = x_i, \quad q_2 = y_i$$

gesteld moet worden, volgens (13)

$$E = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} p^2 x_i^2 + \frac{1}{2} q^2 y_i^2$$

zijn.

De karakteristieke functie der betrekkelijke beweging is

$$H = E + S.$$

Beschouwen wij de beweging, die plaats grijpt, wanneer de  $x$ ,  $y$ -assen met hun vlak om den oorsprong draaien, als gestoorde beweging, en stellen wij de draaiingssnelheid van het  $xy$ -vlak oneindig klein; zoo blijft van de storingsfunctie, bij verwaarloozing van oneindig kleinen van hogere orde, slechts het gedeelte van de eerste orde over; dus, nog  $m_i = 1$  aannemende, alleen

$$S = -L = -\gamma \left( x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) \dots \dots (91)$$

De gedeeltelijke differentiaalvergelijking voor de ongestoorde beweging wordt tot

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial y_i} \right)^2 + \frac{1}{2} p^2 x_i^2 + \frac{1}{2} q^2 y_i^2 = 0,$$

en laat zich splitsen in

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h, \quad \text{of} \quad V = -ht + W,$$

waar  $h$  de standvastige der levende kracht is, en

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y_i} \right)^2 + \frac{1}{2} p^2 x_i^2 + \frac{1}{2} q^2 y_i^2 = h;$$

deze laatste laat zich weer splitsen in

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \sqrt{2} \sqrt{h - \alpha_0 - \frac{1}{2} p^2 x_i^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial W}{\partial y_i} = \sqrt{2} \sqrt{\alpha_0 - \frac{1}{2} q^2 y_i^2};$$

dus wordt

$$dV = -h dt + \sqrt{2\alpha_0 - q^2 y_i^2} dy_i + \sqrt{2(h - \alpha_0) - p^2 x_i^2} dx_i,$$

waar  $h$  en  $\alpha_0$  de twee canonische standvastigen zijn; en zijn de canonische integralen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \alpha_0} &= \int \frac{dy_i}{\sqrt{2\alpha_0 - q^2 y_i^2}} - \int \frac{dx_i}{\sqrt{2(h - \alpha_0) - p^2 x_i^2}} = -\beta_0, \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= -t + \int \frac{dx_i}{\sqrt{2(h - \alpha_0) - p^2 x_i^2}} = -\tau, \end{aligned} \right\} (92)$$

wanneer  $\beta_0$  en  $\tau$  twee nieuwe willekeurige standvastigen aanduiden. Men kan er ook voor schrijven

$$x_i = \frac{\sqrt{2(h - \alpha_0)}}{p} \text{Sin } p(t - \tau), \quad y_i = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{q} \text{Sin } q(t - \tau - \beta_0);$$

waaruit blijkt, dat de beweging van het punt uit twee harmonische trillingen is samengesteld; of

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{1}{p} \sqrt{2(h - \alpha_0)} \text{Sin } p t', & y_i &= \frac{1}{q} \sqrt{2\alpha_0} \text{Sin } q t'', \\ \text{voor } t' &= t - \tau, & t'' &= t - \tau - \beta_0, \\ \text{terwijl } p_1 &= \sqrt{2(h - \alpha_0)} \text{Cos } p t', & p_2 &= \sqrt{2\alpha_0} \text{Cos } q t''. \end{aligned} \right\} (93)$$

Dit zijn de vergelijkingen van de figuren van LISSAJOUS voor de slingertijden  $\frac{2\pi}{p}$  en  $\frac{2\pi}{q}$ .

Met behulp van deze neemt de storingsfunctie volgens (91) den vorm

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\gamma}{pq} \sqrt{(h - \alpha_0)\alpha_0} (p \text{Sin } q t'' \cdot \text{Cos } p t' - q \text{Sin } p t' \cdot \text{Cos } q t'') = \\ &= \frac{2\gamma}{q} \sqrt{(h - \alpha_0)\alpha_0} \left( -\frac{p+q}{2p} \text{Sin}(p t' - q t'') + \frac{p-q}{2p} \text{Sin}(p t' + q t'') \right) \end{aligned}$$

aan, en is dus  $S$  eene kleine grootheid van de eerste orde. Volgens (17)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial \alpha_0} &= \frac{d\beta_0}{dt}, & -\frac{\partial S}{\partial h} &= \frac{d\tau}{dt}, \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_0} &= \frac{d\alpha_0}{dt}, & \frac{\partial S}{\partial \tau} &= \frac{dh}{dt}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (94)$$

vormende, komen links overal grootheden van de eerste orde, welke den tijd slechts in periodische functiën bevatten; dus kan de invloed van de draaiing van het coördinatenstelsel, die wij standvastig stellen willen, slechts dan merkbaar worden, wanneer de grootheden links, gedurende een, met den slingertijd vergeleken, groot tijdsverloop, hetzelfde teeken behouden. De termen links, afkomstig van het gedeelte van  $S$ , dat den factor  $\text{Sin}(p t' + q t'')$  bevat, dragen niets tot de merkbare verschijnselen bij, en de geheele  $S$  zelf heeft slechts dan invloed, wanneer

$$T_0 = q t'' - p t' \dots \dots \dots (95)$$

eene langzaam aangroeiende grootheid, d. w. z.  $q - p$  eene kleine grootheid van de orde van  $\gamma$  is.

Dus worden alleen de figuren van LISSAJOUS behoorende bij zeer weinig verschillende slingertijden in twee loodrecht op elkaar staande richtingen door eene langzame standvastige draaiing der coördinatenassen, en wel alleen door de ontbondene der draaiingssnelheid loodrecht op hun vlak, merkbaar gewijzigd; die, behoorende bij andere verhoudingen der slingertijden, niet.

Wij behoeven dus verder alleen het geval, dat  $q-p$  van de orde van  $\gamma$  is nategaan; dan wordt

$$S = \frac{2\gamma}{p} \sqrt{(h-\alpha_0)\alpha_0} \text{Sin } T_0 \dots \dots \dots (96)$$

17. Om de door (93) uitgedrukte figuren van LISSAJOUS of de ongestoorde beweging gemakkelijker te overzien, willen wij

$$x_i = \mu_1 \text{Sin } t_0, \quad y_i = \lambda_1 \text{Sin } t_0 + \lambda_2 \text{Cos } t_0$$

schrijven, waar

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2(h-\alpha_0)}}{p}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{p} \text{Cos } T_0, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{p} \text{Sin } T_0, \quad (97)$$

is, en  $T_0$  gedurende eene slingering slechts onmerkbaar verandert. Er blijkt uit, dat gedurende eene slingering de baan van het punt slechts onmerkbaar van eene ellips afwijkt, wier vergelijking

$$\mu_1^2 y_i^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) x_i^2 - 2\lambda_1 \mu_1 x_i y_i = \lambda_2^2 \mu_1^2 \dots \dots (98)$$

men door eliminatie van  $t_0$  uit (97) vindt. Vergelijken wij met deze ellips eene, wier groote as positief naar links  $X$  van de  $x$ -as afwijkt (zie fig. 1), en die ten opzichte van de richting  $\eta$  der groote ( $2a$ ) en  $\xi$  der kleine ( $2b$ ) as door

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = a^2 b^2$$

wordt bepaald. Tusschen de coördinaten  $x_i, y_i$  en  $\xi, \eta$  bestaan, tengevolge van deze keuze de volgende betrekkingen.

$$\eta = x_i \text{Cos } X + y_i \text{Sin } X, \\ \xi = -y_i \text{Cos } X + x_i \text{Sin } X;$$

en de vergelijking van de ellips wordt dus

$$y_i^2 \left( \frac{\text{Cos}^2 X}{b^2} + \frac{\text{Sin}^2 X}{a^2} \right) + x_i^2 \left( \frac{\text{Sin}^2 X}{b^2} + \frac{\text{Cos}^2 X}{a^2} \right) + 2x_i y_i \frac{\text{Sin } X \cdot \text{Cos } X}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) = 1 \dots \dots \dots (99)$$

De vergelijking van (98) met (99) geeft

$$\frac{1}{\lambda_2^2} = \frac{\text{Cos}^2 X}{b^2} + \frac{\text{Sin}^2 X}{a^2},$$

$$\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2^2 \mu_1^2} = \frac{\text{Sin}^2 X}{b^2} + \frac{\text{Cos}^2 X}{a^2},$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2 \mu_1} = \frac{(b^2 - a^2) \text{Sin} X \cdot \text{Cos} X}{a^2 b^2}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\mu_1^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_2^2 \mu_1^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \text{Cos} 2X, \quad \frac{2 \lambda_1 \mu_1}{\lambda_2^2 \mu_1^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \text{Sin} 2X,$$

en met (97)

$$Tg 2X = \frac{2 \lambda_1 \mu_1}{\mu_1^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 2 \frac{\sqrt{a_0(h - a_0)}}{h} \text{Cos} T_0;$$

of, wanneer men nog voor de verhouding van de kleine as tot de groote  $Tg \chi$  invoert, en

$$a' = \frac{a_0}{h} \dots \dots \dots (100)$$

schrijft,

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos} 2X \cdot \text{Cos} 2\chi &= 1 - 2a', \\ \text{Sin} 2X \cdot \text{Cos} 2\chi &= 2 \sqrt{a'(1-a')} \text{Cos} T_0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (101)$$

Deze vergelijkingen drukken vorm en ligging van de slingerings-ellips zeer eenvoudig in de canonische grootheden uit. Om de meetkundige beteekenis van  $a'$  aan te geven, construeeren wij den omgeschreven rechthoek van de ellips, wiens zijden met de coördinatenassen evenwijdig loopen. De hoekpunten daarvan vallen voor elke waarde van  $f$  (zie fig. 1) op den cirkel, met den straal  $\sqrt{2h}$  om den oorsprong beschreven, en

$$\sqrt{a'} = \text{Sin} f.$$

De zin van de beweging in de baan is, overeenkomstig met fig. 1, links- of rechtsdraaiend, al naarmate  $\frac{d}{dt} \left( \frac{y_i}{x_i} \right)$  positief of negatief is. Het teeken hiervan, of wat hetzelfde is, van  $x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}$  is volgens (91) en (96) het tegengestelde van dat van  $\text{Sin} T_0$ . Om den zin van de beweging in de ellips aan te geven, willen wij ons steeds, als bij de beschouwing van fig. 1, plaatsen aan die zijde van het  $xy$ -vlak, van waaruit gezien de  $y$ -as links omgaande op de  $x$ -as volgt; bij de gewone keuze van onze rechthoekige drieassige coördinatenstelsels zou hier dus de positieve  $z$ -as liggen. Van deze zijde van het vlak de beweging in de baan beschouwende, zullen wij met  $[+]$  of  $[-]$  aanduiden, dat zij rechts omgaande of links omgaande plaats heeft. De vergelijking

$$\text{Sin} T_0 = [\pm]^r \sqrt{\text{Sin} T_0} \dots \dots \dots (102)$$

bepaalt dan of men  $[+]$  of  $[-]$  moet nemen, en leert dus uit  $\text{Sin } T_0$  den zin van de beweging kennen.

18. Gaan wij nu over tot de gestoorde beweging. Stelt men (96) in (94), en merkt men op, dat  $\tau$  in  $T_0$  slechts met den oneindig kleinen factor  $p - q$  vermenigvuldigd optreedt, zoo wordt tot op kleine grootheden van de tweede orde

$$\frac{dh}{dt} = 0, \dots \dots \dots (103)$$

overeenkomstig met de wet van levende kracht, die geheel streng voor de betrekkelijke beweging blijft gelden, wanneer  $\gamma$  standvastig is. Dat hier afwijkingen van de tweede orde voorkomen kunnen, is te wijten aan het verwaarloozen van grootheden, die op het merkbare deel der verschijnselen geen invloed kunnen hebben.

Verder vindt men zoo

$$\frac{d\beta_0}{dt} = -\frac{\gamma}{p} \frac{h - 2\alpha_0}{\sqrt{(h - \alpha_0)\alpha_0}} \text{Sin } T_0, \dots \dots \dots (104)$$

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = -2\gamma \sqrt{\alpha_0(h - \alpha_0)} \text{Cos } T_0, \dots \dots \dots (105)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\gamma}{p} \frac{\alpha_0}{\sqrt{(h - \alpha_0)\alpha_0}} \text{Sin } T_0 \dots \dots \dots (106)$$

In plaats van (104) willen wij nemen

$$\frac{dT_0}{dt} = \gamma \frac{h - 2\alpha_0}{\sqrt{(h - \alpha_0)\alpha_0}} \text{Sin } T_0 + (q - p),$$

wanneer weer de grootheden van de tweede orde

$$(q - p) \frac{d\beta_0}{dt}, \quad (q - p) \frac{d\tau}{dt},$$

verwaarloosd worden. Heeft men (104) en (105) geïntegreerd, zoo volgt  $\tau$  door eene quadratuur. Wij zullen nog  $\alpha'$ , hetwelk wij te voren (zie (100)) bepaalden, invoeren, waardoor de te integreeren vergelijkingen, daar  $h$  volgens (103) standvastig is,

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -2\gamma \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{Cos } T_0, \dots \dots \dots (107)$$

$$\frac{dT_0}{dt} = (q - p) + \gamma \frac{1 - 2\alpha'}{\sqrt{\alpha'(1 - \alpha')}} \text{Sin } T_0 \dots \dots \dots (108)$$

worden. Uit beiden volgt

$$\frac{dT_0}{d\alpha'} = \frac{dT_0}{dt} \frac{1}{\frac{d\alpha'}{dt}} = -\frac{q - p}{2\gamma \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{Cos } T_0} - \frac{1 - 2\alpha'}{2\alpha'(1 - \alpha')} \text{Tg } T_0,$$

dus de integraal

$$\text{Sin } T_0 = e^{-\int \frac{1-2\alpha'}{2\alpha'(1-\alpha')} d\alpha'} \left( g' - \left( \int e^{\int \frac{1-2\alpha'}{2\alpha'(1-\alpha')} d\alpha'} \frac{d\alpha'}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \right)^{\frac{q-p}{2\gamma}} \right),$$

waar  $g'$  eene willekeurige standvastige is; of

$$\text{Sin } T_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} (g' - \lambda \alpha'), \dots \dots \dots (109)$$

wanneer wij stellen

$$\lambda = \frac{q-p}{2\gamma}; \dots \dots \dots (110)$$

dus

$$\text{Cos } T_0 = \frac{\pm}{\sqrt{(1-\alpha')\alpha'}} \sqrt{(1+2g'\lambda)\alpha' - \alpha'^2(1+\lambda^2) - g'^2}. \quad (111)$$

Volgens (107)

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \mp \frac{q-p}{\lambda} \sqrt{\alpha'(1+2g'\lambda) - g'^2 - \alpha'^2(1+\lambda^2)},$$

$$\int \mp \frac{q-p}{\lambda} dt = \sqrt{1+\lambda^2} \int \frac{d\alpha'}{\sqrt{\frac{1}{4}(1+2g'\lambda)^2 - g'^2(1+\lambda^2) - [(1+\lambda^2)\alpha' - \frac{1}{2}(1+2g'\lambda)]^2}}.$$

Daar het teeken van  $\text{Cos } T_0$  met den tijd veranderen kan, en dien overeenkomstig voor elk tijdselement  $+$  of  $-$  gekozen moet worden, mag niet geschreven worden

$$\int \mp \frac{q-p}{\lambda} dt = \mp \int \frac{q-p}{\lambda} dt.$$

Stelt men een oogenblik

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(1+2g'\lambda)^2 - g'^2(1+\lambda^2) &= k^2, \\ (1+\lambda^2)\alpha' - \frac{1}{2}(1+2g'\lambda) &= y, \end{aligned}$$

zoo komt

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \text{Arcsin} \frac{y}{k} + \text{standv.} = \int_0^i \mp \frac{q-p}{\lambda} dt,$$

of

$$\frac{2(1+\lambda^2)\alpha' - (1+2g'\lambda)}{\sqrt{(1+2g'\lambda)^2 - 4g'^2(1+\lambda^2)}} = -\text{Sin} \left( \int_0^i \pm \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} (q-p) dt + g'' \right), \quad (111)$$

wanneer  $g''$  de nieuwe willekeurige standvastige is; dus

$$\alpha' = \frac{1+2g'\lambda}{2(1+\lambda^2)} - \frac{\sqrt{(1+2g'\lambda)^2 - 4g'^2(1+\lambda^2)}}{2(1+\lambda^2)} \text{Sin} \left( \int_0^i \pm \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} (q-p) dt + g'' \right), \quad (112)$$

$$\cos T_0 = \frac{\pm}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \sqrt{\alpha'(1-\alpha') - (g' - \lambda\alpha')^2}$$

met (111).

Nu kunnen wij de vergelijkingen opstellen, waarin (101) in de gestoorde beweging overgaan. Met (101) en (107) wordt

$$\begin{aligned} \sin 2X \cdot \cos 2\chi &= -\frac{2\lambda}{q-p} \frac{d\alpha'}{dt} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{(1+2g'\lambda)^2 - 4g'^2(1+\lambda^2)}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cos \left( \int_0^t \pm \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} (q-p) dt + g'' \right) = \\ &= \pm \frac{\sqrt{1+4g'\lambda - 4g'^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cos \left( \int_0^t \pm \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} (q-p) dt + g'' \right). \end{aligned} \quad (113)$$

Evenzoo volgt uit (101) en (112)

$$\begin{aligned} \cos 2X \cdot \cos 2\chi &= 1 - \frac{1+2g'\lambda}{1+\lambda^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{(1+2g'\lambda)^2 - 4g'^2(1+\lambda^2)}}{1+\lambda^2} \sin \left( \int_0^t \pm \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} (q-p) dt + g'' \right) = \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda^2} (\lambda - 2g') + \frac{\sqrt{1+4g'\lambda - 4g'^2}}{1+\lambda^2} \sin \left( \int_0^t \pm \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} (q-p) dt + g'' \right). \end{aligned} \quad (114)$$

Wij voeren nu vooreerst  $\psi$  in, bepaald door

$$\frac{q-p}{2\gamma} = \lambda = -\cotg \psi, \quad 0 < \psi < 180^\circ \dots \dots (115)$$

Verder merken wij op, dat in (113)  $\frac{\sqrt{1+4g'\lambda - 4g'^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$  niet

groter dan 1 zijn kan, omdat de Cosinus aan de rechterzijde de waarde 1 in verloop van tijd kan bereiken, en voor reële verschijnselen de linkerzijde van (113) niet groter dan 1 mag worden. Wij kunnen deze standvastige positieve coëfficiënt dus aan  $\sin \varepsilon'$  gelijkstellen, en  $\varepsilon'$  zoo kiezen, dat  $0 < \varepsilon' < 180^\circ$ ; terwijl eindelijk de keuze

$$\frac{\lambda - 2g'}{\sqrt{1+\lambda^2}} = -\cos \varepsilon' \dots \dots \dots (116)$$

het quadrant van  $\varepsilon'$  geheel bepaalt. Daar

$$\sqrt{1+\lambda^2} \frac{q-p}{\lambda} = \frac{2\gamma}{\sin \psi},$$

wordt met

$$2D' = -\int_0^t \pm \frac{2\gamma}{\sin \psi} dt, \quad g'' = 90^\circ - 2\varepsilon', \quad \dots \dots (117)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 2 X . \cos 2 \chi &= \cos \psi . \cos \varepsilon' + \sin \psi . \sin \varepsilon' . \cos 2 (D' + \delta'), \\ \sin 2 X . \cos 2 \chi &= \pm \sin \varepsilon' . \sin 2 (D' + \delta'). \end{aligned} \right\} (118)$$

Volgens (111) en (101), en omdat de wortelteekens hier overal de positieve wortels aanduiden, moet het teeken  $\pm$  gekozen worden gelijk aan dat van  $\frac{\sin 2 X}{\sqrt{\sin^2 2 X}}$ . Verandert in verloop van tijd het

teeken van  $\sin 2 X$ , dan gaat  $\sin 2 X$  en dus, volgens (118),  $\sin 2 (D' + \delta')$  gelijktijdig door nul; dus bereikt  $2 (D' + \delta')$  dan 0 of  $180^\circ$ . Van hieraf wordt de integratie in  $D'$  (zie 117) met tegengesteld teeken voortgezet. Voor de waarden van  $\cos 2 (D' + \delta')$  op een later tijdstip is het echter onverschillig, of men van die waarden van  $2 (D' + \delta')$  uit de toename positief of negatief neemt, en de cosinus doorloopt dus verder dezelfde waarde, als wanneer het teeken onveranderd bleef; hetzelfde geldt van  $\pm \sin 2 (D' + \delta')$ , daar  $\sin 2 (D' + \delta')$  op zich zelf aan weerszijden van het punt, waar het teeken verandert, symmetrisch ten opzichte daarvan dezelfde waarden met tegengesteld voortteeken doorloopt. Men kan dus vooreerst, daar deze redeneering voor elk volgend tijdstip, waarbij het teeken van  $\sin 2 X$  verandert, eveneens geldt,

$$\begin{aligned} \cos 2 (D' + \delta') &= \cos \left( \mp \int_0^t \frac{2 \gamma}{\sin \psi} dt + 2 \delta' \right), \\ \pm \sin 2 (D' + \delta') &= \pm \sin \left( \mp \int_0^t \frac{2 \gamma}{\sin \psi} dt + 2 \delta' \right) \end{aligned}$$

schrijven, waar het  $\pm$  teeken nu in 't verloop van tijd niet verandert, en dus alleen van den begintoestand afhangt. Daar nu  $\pm \delta'$  eene uit den begintoestand te bepalen willekeurige standvastige is, kan men daarvoor eenvoudig  $\delta$  schrijven, zoodat, met

$$D_t = - \frac{\gamma}{\sin \psi} t, \dots \dots \dots (119)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 2 X . \cos 2 \chi &= \cos \psi . \cos \varepsilon' + \sin \psi . \sin \varepsilon' . \cos 2 (D_t + \delta), \\ \sin 2 X . \cos 2 \chi &= \sin \varepsilon' . \sin 2 (D_t + \delta). \end{aligned} \right\} (120)$$

Om den zin van de beweging in de baan te bepalen, moeten wij (102) en (109) samen nemen. Volgens (116), (120) en (101) is echter

$$\begin{aligned} 2 g' - 2 \lambda a' &= (-\lambda + \cos \varepsilon' \sqrt{1 + \lambda^2} + \lambda + \lambda \cos \psi . \cos \varepsilon' + \\ &+ \lambda \sin \psi . \sin \varepsilon' . \cos 2 (D + \delta) = \cos \varepsilon' . \sin \psi - \cos \psi . \sin \varepsilon' . \cos 2 (D_t + \delta). \end{aligned}$$

Dus is

$$A = \cos \varepsilon' . \sin \psi - \cos \psi . \sin \varepsilon' . \cos 2 (D_t + \delta) = [\pm]' \sqrt{A^2} (121)$$

de vergelijking, die bij de bepaling van  $\delta$  en  $\varepsilon'$  in (120) gebruikt moet worden. Is voor een gegeven tijd  $t = 0$ ,  $X = X_0$ ,  $\chi = \chi_0$  en  $[\pm]_0^r$  gegeven, zoo bepalen (120) en (121)  $X$ ,  $\chi$  en  $[\pm]^r$  voor elk ander tijdstip; d. w. z. de ligging en den vorm van de baan, en den zin van de beweging in deze, zoodra men  $\varepsilon'$  en  $\delta$  voor  $t = 0$  bepaald heeft.

19. Het overzicht over deze verschijnselen wordt vergemakkelijkt door de volgende algemeene opmerkingen.

De ligging en vorm van de slingeringsellips zoowel als de zin van de beweging in deze, dien wij kortweg het teeken van de ellips zullen noemen, veranderen periodisch; want bij de substitutie  $t \pm I\pi \frac{\text{Sin } \psi}{\sqrt{\gamma^2}}$ , waarin  $I$  een geheel getal voorstelt, in plaats van  $t$ , verandert (120) niet.

Vergelijkt men met het beschouwde geval, dat, waar  $\psi$  de waarde  $\psi'' = 180^\circ - \psi$ , en dus  $\text{Cos } \psi$  het tegengestelde teeken heeft; noemt men de standvastige  $\varepsilon$  daar  $\varepsilon''$ ; en voert men dan in plaats van  $\psi''$  en  $\varepsilon''$ ,  $\psi$  en  $\varepsilon = 180^\circ - \varepsilon''$  in; zoo krijgt men (120) onveranderd in vorm terug; maar in (121) is het teeken omgekeerd, d. w. z. dezelfde ligging en vorm der ellipsen vertoonen zich, doch het teeken is het tegengestelde geworden. Wij kunnen dus, beide gevallen samenvattende, door

$$\text{Cos } \varepsilon = \text{Cos } \varepsilon' \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}}, \quad 0 < \varepsilon < 180^\circ, \dots \dots (122)$$

voor (120) en (121) de volgende stellen.

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } 2X \cdot \text{Cos } 2\chi &= \sqrt{\text{Cos}^2 \psi} \cdot \text{Cos } \varepsilon + \text{Sin } \psi \cdot \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Cos } 2(D, + \delta), \\ \text{Sin } 2X \cdot \text{Cos } 2\chi &= \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } 2(D, + \delta), \end{aligned} \right\} \text{(A)}$$

$$A = \text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Sin } \psi - \sqrt{\text{Cos}^2 \psi} \cdot \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Cos } 2(D, + \delta) = \left[ \pm \right]^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} \sqrt{A^2}. \quad \text{(B)}$$

$\text{Sin } 2X$  en  $\text{Sin } 2(D, + \delta)$  worden gelijktijdig nul; bij twee tijdstippen, die ten opzichte van een nulpunt van  $\text{Sin } 2(D, + \delta)$  symmetrisch liggen, behooren dezelfde waarden van  $\text{Cos } 2(D, + \delta)$ , de tegengestelde van  $\text{Sin } 2(D, + \delta)$ ; dus dezelfde van  $2\chi$  en  $\left[ \pm \right]^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}}$ ; maar waarden van  $2X$ , die symmetrisch zijn ten opzichte van het bij het nulpunt van  $\text{Sin } 2(D, + \delta)$  behoorend nulpunt van  $\text{Sin } 2X$ , m. a. w. de groote assen van de slingeringskrommen, liggen symmetrisch ten opzichte van de coördinatenassen der  $x$  en  $y$ . Men kan dus de periode, na welke de slingeringen weer hun oorspronkelijken vorm, ligging en teeken hebben, in twee onderperioden verdeelen, die in

't algemeen verschillend van duur zijn. In de eerste helft van de eerste onderperiode verlaat de groote as hare oorspronkelijke ligging ( $D, = 0, 2(D, + \delta) = 2\delta$ ), tot zij met eene coördinatenas samenvalt ( $\text{Sin } 2(D, + \delta) = 0, \text{Cos } 2(D, + \delta) = \pm 1$ ); gedurende de tweede helft worden dezelfde ellipsen met hetzelfde teeken in omgekeerde volgorde en symmetrische ligging ten opzichte van de coördinatenassen doorlopen, totdat de groote as de ligging bereikt, die met de oorspronkelijke symmetrisch is ( $\text{Sin } 2(D, + \delta) = -\text{Sin } 2\delta, \text{Cos } 2(D, + \delta) = \text{Cos } 2\delta$ ); dan begint de tweede onderperiode, gedurende welke in 't algemeen andere vormen dan in de eerste doorlopen worden, maar die door het tijdstip ( $\text{Sin } 2(D, + \delta) = 0, \text{Cos } 2(D, + \delta) = \mp 1$ ) weder in symmetrische helften verdeeld wordt, en bij wier einde ( $D, = \pm \pi$ ) men de oorspronkelijk gegeven slingering terugziet.

In de formules (A) en (B) is  $\psi$  eene standvastige, die afhangt van de gegeven krachtfunctie en van de gegeven beweging van het vlak, waarin het punt zich moet bewegen.  $\varepsilon$  omvat eene groep van elliptische bewegingsvormen, die bij onveranderde  $\psi$  in 't verloop van tijd allen in elkaar overgaan, doordat  $D, + \delta$  achtereenvolgens alle waarden doorloopt.  $\delta$  eindelijk bepaalt, welke ellips uit zulk eene groep als begintoestand genomen werd, of w. h. z. i. bepaalt het beginpunt van telling van den tijd in elke kring van opvolgende verschijnselen gekenmerkt door eene zekere waarde van  $\varepsilon$ .

§ 2. *Constructie der slingerbanen. Plaats van het punt in de baan.*

20. Wij zullen nu de vergelijkingen (A) en (B) construeeren. In de eerste plaats moeten daartoe  $\varepsilon$  en  $\delta$  uit den begintoestand bepaald worden; daarbij mogen wij altijd  $2X_0$  als tusschen  $-\pi$  en  $+\pi$  liggende aannemen. Daar (A) en (B) voor  $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } 2X_0 \cdot \text{Cos } 2\chi_0 &= \sqrt{\text{Cos}^2 \psi} \cdot \text{Cos } \varepsilon + \text{Sin } \psi \cdot \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Cos } 2\delta, \\ \text{Sin } 2X_0 \cdot \text{Cos } 2\chi_0 &= \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } 2\delta, \end{aligned} \right\} (123)$$

$$A = \text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Sin } \psi - \sqrt{\text{Cos}^2 \psi} \cdot \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Cos } 2\delta = \left[ \pm \right]_0^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} \sqrt{A^2} (124)$$

worden, kiezen wij (zie fig. 2) op een bol twee, elkaar in den pool P onder den hoek  $90^\circ \sim \psi$  snijdende, groote cirkels; waarbij wij met  $\sim$  aanduiden, dat men de volstreckte waarde van het verschil moet nemen. In de richting PL tellen wij op den lengtecirkel, L, de lengten positief, in de tegengestelde negatief, evenzoo op den tijdccirkel, PZ,  $2\delta$  positief in de richting PZ. Overeenkomstig met het teeken van  $2X_0$  meten wij dit op den lengtecirkel van P uit af, en leggen door het uiteinde

van dit stuk een nieuwen grooten cirkel, den karakteristieken,  $K$ , die met den lengtecirkel den hoek  $90^\circ \pm 2\chi_0$ , naar de zijde van  $P$  en den tijdscirkel, insluit. Volgens (120) is dan in den bolvormigen driehoek  $PLZ$  de zijde tegenover  $90^\circ \pm 2\chi_0$ ,  $2\delta$ , en de hoek tegenover  $2\chi_0$ ,  $\varepsilon$ . Wij vinden dus twee aan (123) voldoende stelsels van  $\delta$  en  $\varepsilon$ , zoodra eene ellips gegeven is, en derhalve  $\chi_0$  van nul verschilt. Inderdaad heeft men dan volgens (121) te onderscheiden tusschen ellipsen met positief en negatief teeken, en het criterium (121), of wat hetzelfde is (124), laat zich gemakkelijk terug brengen tot de keuze van  $\pm \chi_0$ . In  $PLZ$  is namelijk

$$\mp \text{Sin } 2\chi_0 = \text{Cos } 2\delta. \text{Sin } \varepsilon \sqrt{\text{Cos}^2 \psi} - \text{Cos } \varepsilon. \text{Sin } \psi, \dots (125)$$

dus met (121)

$$\mp 1 = \left[ \pm \right]^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}}.$$

Men moet dus de zijden  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  en de hoeken  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  van een bolvormigen driehoek zoo kiezen, dat

$$A_1 = 2X_0, \quad c_1 = 90^\circ \sim \psi, \quad b_1 = 90^\circ + \left[ \pm \right]^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} 2\chi_0;$$

dan is

$$a_1 = \varepsilon, \quad B_1 = 2\delta.$$

Neemt men nog den grooten cirkel  $PF$  loodrecht op den lengtecirkel, zoo vindt men, daar volgens (101)

$$\text{Cos } 2X. \text{Cos } 2\chi = \text{Cos } 2f,$$

(met 123) bij  $F$  den hoek  $2f$ , waardoor de ligging van de hoekpunten van den rechthoek, die aan de slingeringsellips met de zijden evenwijdig aan de coördinatenassen omschreven is, op den cirkel met den straal  $\sqrt{2}h'$

bepaald wordt, terwijl  $PF$  volgens (101)  $90^\circ \left[ \pm \right]^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} T_0$  voorstelt.

De verschijnselen, die uit de gegeven slingingering ontstaan, verkrijgt men nu, doordat men bij gelijkblijvende helling  $\varepsilon$  van den karakteristieken cirkel  $K$  op den tijdscirkel, het knooppunt van beiden over den laatste met de gelijkmatige snelheid  $-\frac{2\gamma}{\text{Sin } \psi}$  verschuift; in den telkens door deze cirkels gevormden driehoek,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \varepsilon, \quad c_1 = 90^\circ \sim \psi, \quad B_1 = 2(D, + \delta), \\ \text{is} \quad A_1 &= 2X, \quad b_1 = 90^\circ \left[ \pm \right]^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} 2\chi, \end{aligned} \right\} \text{(C)}$$

d. w. z. de lengte van die knoop van den karakteristieken cirkel met den lengtecirkel, die men, van den tijd cirkel uit langs den karakteristieken cirkel en door den scherp hoek der vlakken van den tijd cirkel en den lengtecirkel gaande, het eerst bereikt, en die wij de opstijgende knoop zullen noemen, is de dubbele hoek van de groote as der slingeringsbaan met de  $x$ -as; en de overmaat van de helling dier vlakken, voortdurend aan dezelfde zijde van beiden genomen, boven  $90^\circ$  bepaalt door hare grootte de dubbele assenverhoudingshoek  $2\chi$  en door haar teken, dat van de baan.

Dat dit geldt voor  $-\pi < 2(D, + \delta) < \pi$  valt terstond door de keuze van den bolvormigen driehoek in het oog. Overschrijdt  $2(D, + \delta)$  de  $-\pi$  of  $+\pi$ , zoo snijden twee der zijden van den bolvormigen driehoek elkaar in het punt diametraal tegenover P, wat echter zonder invloed is op de geldigheid van de formules, wanneer men de hoeken van twee vlakken maar voortdurend aan dezelfde zijde van beiden kiest. Gemakkelijker ziet men misschien nog volgens de vooropgestelde opmerkingen, n<sup>o</sup>. 19, over de symmetrie in de halve onderperioden in, dat men het knooppunt Z bij onveranderlijke helling van het karakteristieke vlak op het tijdvlak maar steeds verder kan laten gaan, als men er slechts op let, dat de helling van den karakteristieken cirkel op den lengtecirkel steeds aan dezelfde zijde van lengtecirkel en karakteristieken cirkel bepaald moet worden.

De periode van de verandering van vorm, ligging en teeken der slingerbanen is geëindigd wanneer dat knooppunt weer op zijne oorspronkelijke plaats is aangekomen. Zij is

$$\Pi = \pi \frac{\sin \psi'}{\sqrt{\gamma^2}}; \dots \dots \dots (126)$$

dus korter dan de periode van het ongestoorde vraagstuk, en ook korter dan de tijd in welke het  $x, y$  stelsel eene draaiing van  $180^\circ$  om de  $z$ -as volbrengt; want

$$\Pi = \frac{2\pi \sqrt{\cos^2 \psi}}{\sqrt{(q-p)^2}} < \frac{2\pi}{\sqrt{(q-p)^2}} \quad \text{en} \quad \Pi < \frac{\pi}{\gamma}$$

volgens (110), (115) en (126).

21. Voordat wij tot eene onderscheiding der belangrijkste gevallen overgaan, willen wij nu nog, vooral met het oog op de uitbreiding van de slingerproef van BRAVAIS, volgens (106),  $\tau$  algemeen uitdrukken.

$$\tau = -\gamma \int_p \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \sin T_0 dt$$

en

$$-p\tau = \gamma \int \frac{g' - \lambda \alpha'}{1 - \alpha'} dt = \gamma \lambda t + \gamma(g' - \lambda) \int \frac{dt}{1 - \alpha'}$$

volgens (109).

Wanneer men de waarde van  $\tau$  bij  $t = 0$  met  $\tau_0$  aanduidt, en let op (115) en (116)

$$p(\tau - \tau_0) = \frac{p-q}{2} t - \frac{1}{2} \frac{\cos \varepsilon' + \cos \psi}{\sin \psi} \gamma \int_0^t \frac{dt}{1 - \alpha'}$$

Volgens (101) en (A)

$$\int_0^t \frac{dt}{1 - \alpha'} = 2 \int_0^t \frac{dt}{1 + \sqrt{(\cos^2 \psi \cos \varepsilon + \sin \psi \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos 2D_t + \delta^2)}}$$

en volgens (119)

$$= -\frac{\sin \psi}{\gamma} \int_{2\delta}^{2(D+\delta)} \frac{du}{m+n \cos u},$$

als

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 + \sqrt{\cos^2 \psi \cos \varepsilon}, \\ n &= \sin \psi \cdot \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (127)$$

$m$  en  $n$  zijn twee positieve grootheden; en  $m - n = 1 + \cos(\psi' + \varepsilon) > 0$ , stellende

$$\sqrt{\cos^2 \psi} = \cos \psi', \text{ en } 0 < \psi' < 90^\circ. \dots \dots (128)$$

Dus

$$\int_{2\delta}^{2(D+\delta)} \frac{du}{m+n \cos u} = \left[ \frac{2}{\sqrt{m^2 - n^2}} \operatorname{Arctg} \left( \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} u \right) \right]_{2\delta}^{2(D+\delta)},$$

en

$$p(\tau - \tau_0) = \frac{p-q}{2} t + \frac{\cos \psi + \cos \varepsilon'}{\sqrt{m^2 - n^2}} \operatorname{Arctg} \left( \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} \frac{\operatorname{Tg}(D_t + \delta) - \operatorname{Tg} \delta}{1 + \frac{m-n}{m+n} \operatorname{Tg}(D_t + \delta) \cdot \operatorname{Tg} \delta} \right), (129)$$

of met (112)

$$p(\tau - \tau_0) = \frac{p-q}{2} t + \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \left[ \frac{\sqrt{\cos^2 \psi + \cos \varepsilon}}{\sqrt{m^2 - n^2}} \right] \operatorname{Arctg} \left( \frac{\sqrt{m^2 - n^2} \sin D_t}{m \cos D_t + n \cos(D_t + 2\delta)} \right). (130)$$

De beteekenis van  $\tau$  volgt uit (93). Het is de tijd, die na eenig veelvoud van  $\frac{2\pi}{p}$  sedert  $t = 0$  nog verlopen moet, voor het punt met positieve  $x$ -snelheid de  $y$ -as overschrijdt; bij  $t = \tau_0$ , vindt dit voor de eerste maal plaats, dan in de ongestoorde beweging na elk

veelvoud van den slingertijd  $\frac{2\pi}{p}$ , in de gestoorde beweging echter  $\tau - \tau_0$  later. Men kan  $\tau - \tau_0$  ontbinden in twee deelen. Daar namelijk de tangens in (130), wanneer  $D$ , om  $\pm I\pi$ , waar  $I$  een geheel getal voorstelt, toeneemt, weer dezelfde waarde aanneemt, en dus periodisch en wel met de periode  $\Pi$  (zie 126) verandert, kunnen wij schrijven

$$\tau - \tau_0 = W_0 I\pi + W_1,$$

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= \left[ \sqrt{\cos^2 \psi} - \frac{\sqrt{\cos^2 \psi + \cos \varepsilon}}{\sqrt{m^2 - n^2}} \right] \frac{p - q}{p \sqrt{(p - q)^2}}, \\ W_1 &= \frac{p - q}{2p} (t - I\Pi) + \frac{1}{p} \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \left[ \frac{\sqrt{\cos^2 \psi + \cos \varepsilon}}{\sqrt{m^2 - n^2}} \right] \operatorname{Arctg} \left( \frac{\sqrt{m^2 - n^2} \sin D}{m \cos D + n \cos(D + 2\varepsilon)} \right), \end{aligned} \right\} (D)$$

waar  $I$  het aantal in  $t$  bevatte geheele perioden, en  $0 < \operatorname{Arctg} < 180^\circ$ , in den zin tegengesteld aan  $\gamma$ , is. Immers volgens (115) is

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2}} \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} = - \frac{p - q}{\sqrt{(p - q)^2}},$$

en de arctg groeit aan in den zin tegengesteld aan  $\gamma$ . Heeft men gedurende eene periode  $\Pi$  voor elk tijdstip  $\tau$  bepaald, dus de ligging van het punt in de door (A) en (B) of door (C) bepaalde baan, zoo vindt men de overeenkomstige plaats  $I$  perioden later, wanneer men het punt uit de eerste plaats zoover over zijne baan terugschuift, dat het in de voorgeschreven beweging den tijd  $W_0 I\pi$  noodig heeft, om die plaats weder te bereiken.

De waarde van  $\cos \varepsilon$ , die men in (D) noodig heeft, volgt uit den bolvormigen driehoek (C)

$$\cos \varepsilon = \sqrt{\cos^2 \psi} \cos 2 X_0 \cos 2 \chi_0 + \left[ \pm \right]_0^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \sin 2 \chi_0 \sin \psi. \quad (131)$$

### § 3. Onderscheiding der belangrijkste gevallen.

22. Wij beschouwen nu de gewichtigste gevallen, welke onder (A) en (B), of, wat hetzelfde is, in de beweging van den karakteristieken cirkel volgens de constructie (C) voorkomen.

Is een slingerellips op eenig oogenblik gegeven, zoo laten zich ten opzichte van de daaruit ontstaande ellipsen drie gevallen onderscheiden, al naarmate er cirkels, rechte lijnen of alleen ellipsen onder voorkomen. De beschouwing van den driehoek (C), welke den karakteristieken cirkel bepaalt, toont nu terstond aan, dat het optreden van

cirkels het samenvallen van den karakteristieken- en lengtecirkel vordert, d. w. z.

$$\text{Cos}^2 \varepsilon = \text{Sin}^2 \psi.$$

Wij stellen geval A:  $\text{Cos}^2 \varepsilon = \text{Sin}^2 \psi > \text{Cos}^2 \psi$ ,

en zullen zien, dat dan geen rechtlijnige slingeren voorkomen, terwijl in

Geval D:  $\text{Cos}^2 \varepsilon = \text{Sin}^2 \psi < \text{Cos}^2 \psi$ ,

zich zowel rechtlijnige als cirkelvormige slingeren vertoonen.

Zullen rechtlijnige slingeren optreden, dan moet bij verschuiving van den karakteristieken cirkel zijne helling op den lengtecirkel  $\frac{\pi}{2}$  kunnen worden. Deze helling is echter een hoek in den driehoek (C), wiens andere hoeken  $90^\circ - \psi'$  en  $\varepsilon$  zijn, wanneer  $\psi'$  als in (128) bepaald wordt; tevens moet in den supplementairen driehoek van (C) de eene hoek recht zijn. Dus moet  $\varepsilon \geq \psi'$  voor  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  en  $180^\circ - \varepsilon \geq \psi'$  voor  $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$  zijn; en is

Geval B:  $\text{Cos}^2 \varepsilon < \text{Cos}^2 \psi$ .

Daarentegen zijn voor het

Geval C:  $\text{Cos}^2 \varepsilon > \text{Cos}^2 \psi$ ,

geene rechtlijnige slingeren onder die, welke achtereenvolgens uit de gegeven ellips ontstaan; en deze houden dus steeds hetzelfde teeken.

Ook blijkt dit uit den rechthoekigen bolvormigen driehoek, door toepassing van den regel van NEPER, die, wanneer de rechtlijnige slingeren in het azimuth  $X_r$  liggen,

$$\text{Cos} \varepsilon = \text{Cos} 2 X_r \cdot \text{Cos} \psi' \dots \dots \dots (132)$$

geeft.

Eindelijk kan men deze discussie der vormen ook aansluiten bij de uitdrukking van  $\text{Sin} 2 \chi$ , die men overeenkomstig met (125) uit den bolvormigen driehoek vindt, nl.

$$\left[ \pm \right]^r \frac{\text{Cos} \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} \text{Sin} 2 \chi = \text{Cos} 2 (D_r + \delta) \cdot \text{Sin} \varepsilon \cdot \text{Cos} \psi' - \text{Cos} \varepsilon \cdot \text{Sin} \psi' \quad (133)$$

Het oogenblik, waarop de slingeren, zoo dit mogelijk is, rechtlijnig worden, vindt men met (119) uit de waarde van  $D_r$ , die bepaald wordt door

$$\text{Cos} 2 (D_r + \delta) \cdot \text{Sin} \varepsilon \cdot \text{Cos} \psi' - \text{Cos} \varepsilon \cdot \text{Sin} \psi' = 0 \dots \dots (134)$$

23. De gevallen B en C laten zich elk in tweeën splitsen, I en II; al naarmate het knooppunt van den karakteristieken- en den lengte-

cirkel zich steeds in denzelfden zin beweegt (dus ook de groote as van de slingerbaan de coördinatenassen  $x$ ,  $y$  opeenvolgend overschrijdt), of niet, (zoodat de groote as van de slingeringskromme om een der coördinatenassen heen en weer slingert). Wanneer de scherpe hoek, dien de karakteristieke- met den tijdcirkel vormt, grooter is dan de scherpe hoek van den tijd- en den lengtecirkel, zoo kan het knooppunt van den karakteristieke- en van den lengtecirkel zoowel in P, als in het diametraal tegenoverliggend punt P<sub>1</sub>, vallen. Is dus aan

$$\text{Geval I:} \quad \text{Sin}^2 \varepsilon > \text{Cos}^2 \psi,$$

voldaan, dan gaat de groote as der slingeringskromme achtereenvolgens over de  $+x$ , de  $+y$ , de  $-x$ , de  $-y$ , de  $+x$ -as enz., of omgekeerd. Bij  $\gamma$  en  $X_0$  positief gaat het knooppunt van den karakteristieke- en den lengtecirkel het eerst over P, hetwelk met de  $x$ -as overeenkomt; dan volgt eene overschrijding van het in onze constructie diametraal tegenover P liggende punt P<sub>1</sub>, dat op deze wijze bereikt, de lengte  $-180^\circ$  heeft, en dus overeenkomt met de coördinatenas, waarvan de lengte  $-\frac{\pi}{2}$  is, d. i. met de  $-y$ -as, enz. De coördinatenassen worden dus in de aan  $\gamma$  tegengestelde richting opeenvolgend overschreden. Het heen en weer zweven van de groote as om een der coördinatenassen vordert, dat het knooppunt van den karakteristieke- en van den lengtecirkel een der beide punten, P of P<sub>1</sub>, nooit bereikt. Zal dit het geval zijn, dan moet de scherpe hoek van den karakteristieke- en van den tijdcirkel kleiner zijn dan die van den laatste en den lengtecirkel, en de scherpe, als  $\varepsilon$  of  $180^\circ - \varepsilon$  te nemen, opening afgekeerd zijn van dat der beide punten P en P<sub>1</sub>, hetwelk niet overschreden wordt.

Dus is

$$\text{Geval II:} \quad \text{Sin}^2 \varepsilon < \text{Cos}^2 \psi.$$

De beweging van het vlak van den karakteristieke cirkel is eene draaiing om zijn middelpunt. Wij kunnen deze ontbinden in eene om eene as loodrecht op het vlak, en die voor ons niet in aanmerking komt, daar wij alleen met den stand van het vlak en niet met de ligging van punten in het vlak te maken hebben; en in eene andere draaiing, wier as in het vlak valt. Deze as staat op elk oogenblik loodrecht op de knooplijn van het karakteristieke vlak met het tijdcirkelvlak. Van den tijdcirkel uit langs den karakteristieke boog (die in den scherpsten hoek van tijd- en lengtevlak valt) gaande, ontmoet men het knooppunt van dezen boog met den lengtecir-

kel eerder of later dan het punt, dat met die oogenblikkelijke as overeenkomt, en na  $90^\circ$  bereikt wordt, al naarmate de karakteristieke boog  $<$  of  $> 90^\circ$  is. Dus bewegen zich de knooppunten van het karakteristieke vlak met den lengte- en den tijdscirkel in denzelfden, of in tegengestelden, zin, al naarmate de karakteristieke boog, die beiden verbindt, kleiner of grooter dan een quadrant is. Daaruit volgt echter onmiddellijk, dat dit knooppunt van het punt P of P<sub>1</sub> (diametraal tegenover P), waarheen zich de scherpe hoek van den karakteristieken- en den tijdscirkel bij de constructie op het tijdstip  $t = 0$  keert, nooit meer dan  $\frac{\pi}{2}$  kan afwijken; d. w. z. de groote as der slingeringsbanen zweeft om de oorspronkelijk het naast bij haar gelegen coördinatenas heen en weer. Voor de twee symmetrisch liggende keerpunten vindt men, uit den bolvormigen driehoek met een quadrant tot zijde,

$$\begin{aligned} \pm \operatorname{Sin} 2 X_m &= \frac{\operatorname{Sin} \varepsilon}{\operatorname{Cos} \psi} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{Cos} \psi} \sqrt{1 - \left[ \operatorname{Cos} 2 X_0 \cdot \operatorname{Cos} 2 \chi_0 \cdot \operatorname{Cos} \psi' + \left[ \pm \right]_0 \frac{\operatorname{Cos} \psi}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 \psi}} \operatorname{Sin} \psi \cdot \operatorname{Sin} 2 \chi_0 \right]^2}. \end{aligned} \quad (135)$$

In de onmiddellijke nabijheid der richtingen, voor welke de slingeringen rechtlijnig worden, grijpt de beweging van de groote as, hier even als in 't geval I, in den zin tegengesteld aan dien van  $\gamma$  plaats.

24. Het vorige samenvattende kunnen wij dus onderscheiden:

$$A. \operatorname{Sin}^2 \psi = \operatorname{Cos}^2 \varepsilon > \operatorname{Cos}^2 \psi.$$

Er treden onder de ontstaande slingerings cirkels op, maar geen rechte lijnen (alleen mogelijk bij  $Tg^2 \psi > 1$ ).

$$B. I. \operatorname{Sin}^2 \psi > \operatorname{Cos}^2 \varepsilon < \operatorname{Cos}^2 \psi.$$

Er komen rechtlijnige slingerings voor; de groote as van de slingeringskromme beweegt zich steeds in den zin tegengesteld aan  $\gamma$ . (Voor  $Tg^2 \psi > 1$  is dit een noodzakelijk gevolg daarvan, dat aan de eerste voorwaarde is voldaan).

$$B. II. \operatorname{Sin}^2 \psi < \operatorname{Cos}^2 \varepsilon < \operatorname{Cos}^2 \psi.$$

Er treden rechtlijnige slingerings op; de groote as der banen slingert om de oorspronkelijk naastbijgelegen coördinatenas heen en weer. (Dit geval kan slechts voorkomen bij  $Tg^2 \psi < 1$ ).

$$C. II. \sin^2 \psi < \cos^2 \varepsilon > \cos^2 \psi.$$

Slingeringen, die niet rechtlijnig worden kunnen, en wier groote as om eene coördinatenas (de naastbij gelegene) slingert; wat bij  $Tg \psi < 1$  een onmiddellijk gevolg daarvan is, dat aan de eerste voorwaarde is voldaan.

$$C. I. \sin^2 \psi > \cos^2 \varepsilon > \cos^2 \psi.$$

Slingeringen, die niet rechtlijnig worden kunnen, en wier as steeds in dezelfde, aan  $\gamma$  tegengestelde, richting verder gaat. (Is alleen bij  $Tg^2 \psi > 1$  mogelijk).

$$D. \sin^2 \psi = \cos^2 \varepsilon \leq \cos^2 \psi.$$

Dan kunnen zoowel cirkels als rechte lijnen optreden. (Alleen mogelijk bij  $Tg^2 \psi < 1$ ).

Eindelijk zullen wij in § 4 nog eenige grensgevallen behandelen.

Volgens (131) speelt het teeken van de gegeven ellips eene wezentlijke rol in de bepaling van  $\cos^2 \varepsilon$ , dus in de bepaling van de klasse, waartoe zij behoort. Daar echter voor deze bepaling het teeken van  $\cos \varepsilon$  niet in aanmerking komt, zou men in elke klasse nog twee onderafdeelingen kunnen maken, al naarmate  $\cos \varepsilon = +\sqrt{\cos^2 \varepsilon}$  of  $\cos \varepsilon = -\sqrt{\cos^2 \varepsilon}$  is. In beide worden dezelfde krommen met tegengesteld teeken in dezelfde volgorde doorloopen; maar hunne ligging is in het eene geval dezelfde ten opzichte van de  $y$ -as als in het andere ten opzichte van de  $x$ -as. Immers het supplement van  $\varepsilon$  en de tegengestelde waarde van  $\chi$  komen overeen met de hoeken van den supplementairen driehoek van (C), waarvan het hoekpunt  $P_1$  de  $y$ -as aanduidt.

25. Om de gelijktijdig met die van  $X$  plaats grijpende verandering van  $\chi$  na te gaan, kunnen wij gebruik maken van de bekende differentiaalvergelijking voor een bolvormigen driehoek (C) met eene veranderlijke zijde  $B_1$  en twee standvastige hoeken,  $a_1$  en  $c_1$ ,

$$\frac{db_1}{dB_1} = \sin c_1 \cdot \sin A_1, \quad \frac{d^2 b_1}{dB_1^2} = \sin c_1 \cdot \cos A_1 \frac{dA_1}{dB_1},$$

welke hier den volgende vorm aannemen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left( \left[ \pm \right]^r 2 \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \chi \right)}{d(2(D_1 + \delta))} &= \sin 2X \cdot \sqrt{\cos^2 \psi} \\ \text{of} \quad -\frac{d\chi}{dt} &= \left[ \pm \right]^r \gamma \sin 2X \cdot \cotg \psi, \end{aligned} \right\} (136)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \left( \left[ \pm \right]^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \chi \right)}{d(2(D, +\delta))} &= \sqrt{\cos^2 \psi} \cdot \cos 2X \frac{d[2X]}{d[2(D, +\delta)]} \\ \text{of} \quad \frac{d^2 \chi}{dt^2} &= \left[ \pm \right]^r \frac{\gamma^2 \cot \psi}{\sin \psi} \cdot \cos 2X \frac{d[2X]}{d[2(D, +\delta)]} \end{aligned} \right\} (136)$$

Uit de eerste volgt, dat  $\frac{d\chi}{dt}$  steeds hetzelfde teeken behoudt; en dus van uit den oorspronkelijken toestand steeds de verhouding  $Tg \chi$  van de kleine as der slingeringsellips tot de groote toe of afneemt; totdat de groote as dien stand bereikt, waar de slingeren rechtlijnig worden en dus  $[\pm]^r$  omkeert, of wel hunne groote as met eene coördinatenas samenvalt, en dus het teeken van  $\sin 2X$  omkeert. Verder bevestigt zij, dat van het oogenblik, dat de groote as eene coördinatenas bereikt, zooals vroeger reeds aangetoond werd, af  $\chi$  den tegengestelden gang neemt.

Wil men zich bij de discussie der veranderingen van  $\chi$  aan den bolvormigen driehoek houden, zoo kan men opmerken, dat de helling van den karakteristieken- op den lengtecirkel voortdurend toe- of voortdurend afneemt, wanneer men het knooppunt van den karakteristieken- met den tijdscirkel tusschen P en P<sub>1</sub> voortdurend in denzelfden zin beweegt. Immers dan neemt het spherisch exces voortdurend toe of af, omdat dit met het oppervlak van den bolvormigen driehoek het geval is. Dit laatste ziet men onmiddellijk in, wanneer de beweging van beide knooppunten in denzelfden zin plaats grijpt. Het is echter ook het geval, wanneer de karakteristieke boog langer dan een quadrant is, omdat het langste stuk daarvan (het quadrant van den tijdscirkel uit genomen) zich toch in denzelfden zin beweegt (zie n<sup>o</sup>. 23) als de knoop met den tijdscirkel.

Laten wij eerst B. I nemen, en de verschijnselen in de twee onderperioden verdeelen, die door twee symmetrische rechtlijnige slingeren begrensd worden; gedurende elk van deze onderperioden blijft het teeken  $\left[ \pm \right]^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos \psi}}$  standvastig, in beide onderperioden

is het verschillend. In dit geval is verder  $\frac{dX}{d(D, +\delta)}$  altijd, zooals in het punt P, positief;  $\varepsilon$  en  $90^\circ - \psi'$ , of  $180^\circ - \varepsilon$  en  $90^\circ - \psi'$  zijn in de klasse B samen grooter dan  $90^\circ$ ; dus geldt bij de overschrijding van de  $x$ -as (waarbij de bolvormige driehoek (C) oneindig klein wordt) het teeken

$$-1 = \left[ \pm \right]_{ax}^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos } \psi}};$$

daar dan ook  $\text{Cos } 2X$  positief is, volgt, dat de volstreckte waarde van  $\chi$  een maximum is ten opzichte van de waarden, die het in die onderperiode aannemen kan. Bij het overschrijden van de  $y$ -as door de groote as der baan (waarbij de supplementaire driehoek van (C) oneindig klein wordt) is  $\text{Cos } 2X$  negatief, maar tevens is volgens

$$\text{Klasse B. . . } \left[ \pm \right]_{ay}^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} = \left[ \pm \right]_{ax}^r \frac{-\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} = +1. \quad (137)$$

$[\pm]^r$  omgekeerd; zoodat weder  $\chi$  een maximum is ten opzichte van de waarden gedurende deze onderperiode.

Gaan wij nu over tot B. II. Wanneer de baan om de  $x$ -, of om de  $y$ -as slingert, wordt deze gedurende eene geheele periode  $\Pi$  twee malen overschreden; de eene overschrijding komt in plaats van de  $y$ -, respectievelijk de  $x$ -overgang in B. I; wij zullen haar dus, in tegenstelling met de andere of normale, de abnormale noemen; bij eene normale overschrijding is  $\frac{dX}{d(D, +\delta)}$  positief, bij eene abnormale negatief.

In de onmiddellijke nabijheid der normale overgangen verkrijgen wij, geheel als bij B. I., voor (C) of voor zijn supplementairen driehoek tusschen het tijd- en lengtevlak oneindig kleine driehoekjes; het teeken der ellipsen wordt daarbij dus weder volgens (137) bepaald, en  $\chi_{ax}$  of  $\chi_{ay}$ , een maximum ten opzichte van de waarden van  $\chi$  in de overeenkomstige onderperiode. Daar het teeken in de abnormale onderperiode het tegengestelde moet zijn van dat in de normale, heeft men

$$\text{Klasse B. . . } \left[ \pm \right]_{ax}^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} = \left[ \pm \right]_{ay}^r \frac{-\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} = +1; \quad (138)$$

en vindt men gemakkelijk, dat ook  $\chi_{ax}$  en  $\chi_{ay}$ , maxima zijn ten opzichte van de waarden van  $\chi$  in de overeenkomstige onderperiodes.

In 't geval C verandert het teeken niet, en moeten dus de beide overgangen met elkaar vergeleken worden. Volgens (136) is

$$\left[ \pm \right]^r \frac{-\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} \text{ }^2 \chi$$

een maximum voor de normale  $x$ - of de abnormale  $y$ -overgang, een minimum voor de normale  $y$ - of de abnormale  $x$ -overschrijding. Stemt

dus het teeken van de ellips bij een normale of abnormale overschrijding van eene coördinatenas overeen met dat, 't welk zich vertoont zou bij de overeenkomstige overschrijding door uit rechte lijnen ontstaande ellipsen, zoo is de verhouding der assen een maximum; is het tegendeel het geval, zoo is het een minimum.

Wat de grootte van  $\chi$  betreft, volgt uit de genoemde oneindig kleine driehoekjes bij de normale overschrijdingen

$$90^\circ + \left[ \pm \right]_{n,x}^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} 2\chi_{n,x} = 180^\circ - \varepsilon - (90^\circ - \psi');$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{of} \quad \chi_{n,x} = \left[ \pm \right]_{n,x}^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \frac{\psi' - \varepsilon}{2}, \\ \text{en evenzoo} \quad \chi_{n,y} = \left[ \pm \right]_{n,y}^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \left( 90^\circ - \frac{\psi' + \varepsilon}{2} \right), \end{array} \right\} \dots (139)$$

Daarentegen vindt men uit de oneindig kleine supplementaire driehoekjes van (C) tusschen het karakteristieke- en tijdvlak bij de abnormale overgangen

$$\left. \begin{array}{l} \chi_{a,x} = \left[ \pm \right]_{a,x}^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \frac{\varepsilon + \psi'}{2}, \\ \chi_{a,y} = \left[ \pm \right]_{a,y}^r \frac{-\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \left( 90^\circ - \frac{\psi' - \varepsilon}{2} \right). \end{array} \right\} \dots (140)$$

#### § 4. Grensgevallen.

26. Geval E.  $\sin \varepsilon = 0$ , onveranderlijke ellipsen.

Tot een bijzonder opmerkelijk geval met het oog op eene slingerproef, waarvan die van BRAVAIS een bijzonder geval is, geeft  $\sin \varepsilon = 0$  aanleiding. Dan is

$$\cos 2X_0 \cdot \cos 2\chi_0 = \cos \psi' \cdot \cos \varepsilon,$$

$$\sin 2X_0 \cdot \cos 2\chi_0 = 0,$$

$$\cos \varepsilon = \left[ \pm \right]^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \sqrt{\cos^2 \varepsilon}, \quad \sqrt{\cos^2 \varepsilon} = 1,$$

$$\text{en} \quad \cos 2X \cdot \cos 2\chi = \cos \psi' \cdot \cos \varepsilon, \quad \sin 2X \cdot \cos 2\chi = 0.$$

Heeft men oorspronkelijk als slingeringskromme eene ellips, wier assen met de coördinatenassen samenvallen, en in de verhouding, bepaald door

$$\chi_E = \frac{1}{2} \psi', \dots \dots \dots (141)$$

tot elkaar staan, en valt de groote as met die coördinatenas samen, waarvoor

$$\frac{\cos 2X}{\sqrt{\cos^2 2X}} = \left[ \pm \right]', \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}}$$

is; zoo blijft het punt zich voortdurend in de oorspronkelijke baan bewegen, of m. a. w. de ellips is onveranderlijk.

Dit blijkt ook duidelijk uit onze constructie; immers bij  $\varepsilon = 0$  of  $\varepsilon = 180^\circ$  valt het karakteristieke vlak samen met het tijdvlak; het knooppunt met het lengtevlak, dat voor  $\varepsilon = 0$  in P, voor  $\varepsilon = 180^\circ$  in  $P_1$  ligt, en de helling blijven voortdurend dezelfde. Wij hebben bij P,  $90^\circ + 2\chi = 90^\circ + \psi'$  en bij  $P_1$ ,  $90^\circ - 2\chi = 90^\circ - \psi'$ ; waaruit volgt, dat het teeken van de ellipsen bepaald moet zijn door

$$+1 = \left[ \pm \right]', \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \text{ bij P en door } -1 = \left[ \pm \right]', \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \text{ bij } P_1.$$

Om den samenhang van het teeken der onveranderlijke ellipsen met de coördinatenas, waarin hare groote as valt, scherper aan te geven, verwijzen wij op n°. 25, waar bewezen wordt, dat de bovenstaande definitie, die voor het teeken van ellipsen, welke abnormaal P of  $P_1$  overschrijden, is. En de onveranderlijke ellips heeft dus hetzelfde teeken als de ellipsen, die abnormaal de coördinatenas, waarmede hare groote as samenvalt, overschrijden.

Het geval  $\cos \varepsilon = 0$  komt overeen met  $\cos 2X_0 = 0$ ,  $X_0 = \pm 45^\circ$ , terwijl  $\chi_1$  en  $\chi_2$  bepaald worden door

$$\cos \psi' = \sin 2\chi, \quad \chi = 45^\circ - \frac{1}{2}\psi';$$

de twee onderperioden zijn dan, afgezien van het teeken der ellipsen, in zooverre dezelfde, dat de eene ten opzichte van de  $x$ -as evenzoo doorloopen wordt als de andere ten opzichte van de  $y$ -as.

27. De grens tusschen de gevallen B. II en C. II vormt

$$\text{Geval F. II. } \cos^2 \varepsilon = \cos^2 \psi \text{ en } \sin^2 \psi < \cos^2 \psi.$$

Dan liggen de slingeringen oorspronkelijk in een van de symmetrieassen; terwijl de kleine as van de slingeringen toeneemt, beweegt de groote as zich in den zin van  $-\gamma$  naar een van de keerpunten, die volgens (135) bepaald worden door

$$\pm \sin 2X_m = Tg \psi';$$

keert dan zich weer naar dezelfde coördinatenas toe, die met ellipsen

$$\chi_{F II} = \psi', \dots \dots \dots (142)$$

overschreden wordt; bereikt het tweede keerpunt

$$\mp \text{Sin } 2 X_m = Tg \psi'$$

aan de andere zijde van de coördinaten- of symmetrie-as; bij steeds afnemende kleine as keert de groote as zich dan weer naar dezelfde symmetrie-as en, wanneer deze, na  $\frac{\pi \text{Sin } \psi'}{\sqrt{\gamma^2}}$ , bereikt wordt, zijn de slingeren weder rechtlijnig geworden.

Een dergelijk grensgeval F. I heeft men tusschen B. I en C. I bij  $Tg^2 \psi > 1$ .

28. Het geval A, dat de verklaring van eenige afwijkingen bevat, die BRAVAIS bij zijne proeven over het bewijs van de aswenteling der aarde met behulp van den conischen slinger heeft opgemerkt, kan men als de grens tusschen C. I en C. II beschouwen; welk laatste in A overgaat, wanneer bij  $Tg^2 \psi > 1$ ,  $\varepsilon$  juist de waarde heeft, bepaald door

$$\text{Sin}^2 \psi = \text{Cos}^2 \varepsilon.$$

Is dit het geval, zoo kan men even goed zeggen, dat de groote as der slingeringsellipsen steeds in dezelfde aan  $\gamma$  tegengestelde richting verder gaat, (A gedurende het oogenblik, dat de slingeren cirkelvormig zijn, beschouwende als behoorende tot C. II); als dat zij om eene coördinatenas slingert, (A beschouwende als behoorende tot C. I). Immers dan hebben het karakteristieke vlak en het lengtevlak dezelfde helling op het tijdvlak, en verkrijgt men het eerste door het tweede bij onveranderlijke helling op het laatste te laten draaien. De tusschen den tijd- en den lengtecirkel ingesloten karakteristieke boog kan alleen, wanneer het karakteristieke- en lengtevlak samenvallen, en dus de knooppunten van den karakteristieken- met den tijd- cirkel de lengte 0 of  $\pm \pi$  hebben, d. w. z. de groote as der slingeringsellips met eene coördinatenas samenvalt, tot  $\frac{\pi}{2}$  worden; alleen op dit oogenblik mag dus de beweging van de groote as als abnormaal worden beschouwd. Vallen de beide vlakken echter samen, zoo is hunne onderlinge helling 0 of  $\pi$ , dus  $2\chi = \pm \frac{\pi}{2}$ , en de beweging cirkelvormig.

Wij moeten onderzoeken, wat er bij dit punt verder gebeurt. Wanneer het knooppunt van den karakteristieken- en den tijd- cirkel over een coördinatenaspunt (P of P<sub>1</sub>) heenbeweegt, en beide vlakken samenvallen, ligt de oogenblikkelijke as van die draaiing van het karakteristieke vlak, welke overblijft wanneer men afziet van de draaiing

om eene as loodrecht op dit vlak, die het slechts in zich zelf verplaatst, op de lengte  $\frac{\pi}{2}$  of  $-\frac{\pi}{2}$ , al naarmate van den zin der beweging in den cirkel; onmiddellijk daarna ligt zij op de lengte  $-\frac{\pi}{2}$ , respectie  $+\frac{\pi}{2}$ , want de karakteristieke boog moet steeds door den scherpen tweevlakshoek genomen worden. Of men nu aanneemt, dat de plotselinge overgang van  $+\frac{\pi}{2}$  tot  $-\frac{\pi}{2}$  of omgekeerd, die op het oogenblik plaats heeft, dat de slingeren cirkelvormig zijn, in positieven of in negatieven zin geschiedt, m. a. w. de denkbeeldige groote as van den cirkel in positieven of negatieven zin rondloopt, doet aan de bepaling van den vorm van de slingeringsbaan niet af; zoodra echter de slingeringskromme niet meer cirkelvormig is, wordt de karakteristieke boog  $< \frac{\pi}{2}$ , en heeft dus de beweging in den zin tegengesteld aan die van  $\gamma$  plaats. De groote as der ellips duikt volgens het vorige, en omdat de lengte van de knoop van het karakteristieke en het lengtevlak het dubbele azimuth  $X$  voorstelt, uit den cirkel op bij het azimuth  $\pm 45^\circ$  van de groote as der slingeringskromme, wanneer het knooppunt van den lengtecirkel en den karakteristieken cirkel bij  $\pm \frac{\pi}{2}$  ligt; en verdwijnt er weder in, terwijl zij een hoek van  $\mp 45^\circ$  met de coördinatenassen maakt. Wij hebben dan den oorspronkelijken toestand teruggekregen, namelijk een cirkel van denzelfden zin. Om de keuze van het teeken voor dit azimuth uit het teeken van den cirkel te bepalen, heeft men op te merken, dat het overeen moet komen met dat van de maximumellips in 't geval C. De willekeurige groote as van den cirkel moet men dus, wanneer men aanneemt dat zij rondloopt in den zin tegengesteld aan  $\gamma$ , in die coördinatenas leggen, bij wier normale overschrijding ellipsen, die uit rechte lijnen ontstaan, hetzelfde teeken hebben als de cirkel. Van deze as ligt het azimuth, waarbij de groote as zich het eerst vertoont,  $45^\circ$  in de richting tegengesteld aan  $\gamma$  af. Tot dezelfde uitkomst komt men, wanneer men de groote as van den cirkel in de as legt, bij wier abnormale overschrijding ellipsen, die uit rechte lijnen ontstaan, hetzelfde teeken hebben als de cirkels, en het azimuth, waarbij de slingeren weder elliptisch worden, overeenkomstig de opvatting als abnormale periode, in den

zin van  $\gamma$ ,  $45^\circ$  verder neemt. Dit azimuth wijkt  $180^\circ$  van het in de vorige beschouwing gevondene af, en de ligging van de groote as is dus dezelfde.

Van hieruit beweegt zich de groote as tegen  $\gamma$  in verder, en wordt bij het overschrijden van de naastvolgende coördinatenas een maximum. Dan is de ligging van het karakteristieke vlak juist de symmetrische van het lengtevlak ten opzichte van het tijdvlak, dus  $90^\circ \pm 2\chi = 180^\circ - 2\psi$ ,  $\pm 2\chi = 90^\circ - 2\psi$ , en de verhouding der beide assen wordt dan bepaald door

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 2\chi_c &= \sin^2 2\psi = \sin^2 2\psi', \\ \chi_c &= 45^\circ \sim \psi'. \end{aligned} \right\} \dots \dots (143)$$

Van hieraf worden dezelfde vormen in omgekeerde volgorde en in symmetrische ligging doorloopen, tot de groote as van de ellips in den cirkel verdwijnt bij een azimuth, dat symmetrisch is met dat, waar zij het eerst verscheen; en met oneindige snelheid in den cirkel rond loopend, treedt zij weder in het oorspronkelijk azimuth er uit te voorschijn. De beweging van het karakteristieke vlak geeft hiervan eene zeer duidelijke voorstelling.

Het oogenblik van cirkelvormige slingeren geeft in 't geval D tot geheel dezelfde beschouwingen aanleiding, als die wij voor 't geval A uitvoerig behandelden.

29. Zooals A de grens tusschen C. I en C. II is, is het geval D een grensgeval van B en wel de grens, die B. I en B. II scheidt. Is eene slingeringswijze gegeven, en uitgemaakt, door volgens (131)  $\varepsilon$  te bepalen, dat zij behoort tot het geval B, dan kan men volgens (134) en (132) bepalen, wanneer en in welke richting de slingeren rechtlijnig worden.

Elk geval behoorende tot de klasse B kan men zoo terugbrengen tot een met oorspronkelijk rechtlijnige slingeren in een azimuth  $X_r$ ; en om uit te maken, of eene slinging tot de klasse B. I of B. II behoort, behoeft men dus slechts het gebied van  $X_r$ , dat tot B. I en dat tot B. II behoort, voor elke waarde van  $\psi$ , te kennen. Deze onderscheiding van B. I en B. II naar  $X_r$  is in 't bijzonder van belang met 't oog op onze slingerproeven (zie Hoofdst. III).

In 't geval B. I is  $\cos^2 \varepsilon < \sin^2 \psi$ ;

In 't geval B. II is  $\cos^2 \varepsilon > \sin^2 \psi$ .

Dus hoort volgens (132) bij

$$\text{bij} \quad \left. \begin{aligned} \cos^2 2X_r &< \text{Tg}^2 \psi \text{ de klasse B. I,} \\ \cos^2 2X_r &> \text{Tg}^2 \psi \text{ de klasse B. II.} \end{aligned} \right\} \dots \dots (144)$$

In de fig. 3 zijn de geschaduwde deelen het gebied van die waarden van  $X$ , die aanleiding geven tot verschijnselen van de klasse B. II, de anderen het gebied van B. I; de grenslijnen van beide vormen het gebied van D, voor de waarde van  $\psi$  ( $30^\circ$ ), die aan de constructie ten grondslag werd gelegd. Neemt  $Tg^2 \psi$  toe, dan breidt zich het gebied van B. I, aan weerszijden van  $\pm 45^\circ$ , symmetrisch uit. De waarde van  $X_r$ , die aanleiding geeft tot een geval van de klasse D, en die wij  $X_r^D$  zullen noemen, nadert meer en meer tot zulk een waarde ( $0$  of wel  $\frac{\pi}{2}$ ), die met eene coördinatenas overeenkomt; want

$$\text{Cos}^2 2X_r^D = Tg^2 \psi \dots \dots \dots (145)$$

Bij  $Tg^2 \psi = 1$  is het gebied van B. II geheel verdwenen, en valt het samen met dat van D; en voor  $Tg^2 \psi > 1$  heeft men noch het geval B. II, noch D.

Neemt  $Tg^2 \psi$  af, dan krimpt daarentegen het gebied van B, I steeds meer in, tot het voor  $Tg^2 \psi = 0$  in twee rechte lijnen, met het azimuth  $\pm 45^\circ$ , overgaat; zooals uit de theorie van de figuren van LISSAJOUS bekend is.

Wij kunnen de onderscheiding van het gebied van B. I en B. II gemakkelijk aangeven in de constructie op den bol. Bij de gegeven waarde van  $\psi$  berekenen wij volgens (145)  $X_r^D$ , en zetten  $+2X_r^D$  en  $-2X_r^D$ , van P en van P<sub>1</sub> uit, op den lengtecirkel af. Legt men door deze vier grenspunten vlakken loodrecht op het lengtevlak, dan zijn dit de karakteristieke vlakken van vier slingeringsvormen, die behooren tot D. Verder berekenen wij voor een gegeven slingeringsvorm, die tot B behoort volgens (132)  $X_r$ ; en zetten eveneens  $+2X_r$  en  $-2X_r$ , op den lengtecirkel van uit P af. Wanneer het zoo verkregen punt valt tusschen een coördinatenpunt P of P<sub>1</sub> en het naastbij gelegen grenspunt, behoort het geval tot de klasse B. II; valt het tusschen de grenspunten, zoo behoort het geval tot de klasse B. I. Van dit punt  $X_r$  gaat in de normale periode het knooppunt van den karakteristieken- en den lengtecirkel steeds in denzelfden zin verder; de abnormale periode bevat de keerpunten  $2X_m$  (zie 135), en deze liggen van de coördinatenas gerekend buiten de punten  $2X_r$ . Eene rechthoekige slingering uit de klasse B. II, gaat dus in de abnormale periode in eene elliptische over, wier groote as zich van de naastbij gelegen coördinatenas, terwijl de kleine as toeneemt, verwijdert; maar, voordat zij met die coördinatenas een hoek van  $45^\circ$  maakt, omkeert en, terwijl de kleine as steeds toeneemt, er eindelijk

mede samenvalt. Van hieraf neemt de kleine as voortdurend af; de groote as blijft zich in denzelfden zin bewegen, en verwijderd zich dus van de coördinatenas; zij bereikt de symmetrische ligging van de oorspronkelijk rechtlijnige slingingering, terwijl de steeds afnemende kleine as nog niet nul is geworden; overschrijdt deze ligging nog steeds in denzelfden zin; keert later om en wendt zich, terwijl de kleine as steeds verder afneemt, weder naar de coördinatenas toe; om eindelijk voor de tweede maal de symmetrische lijn van de oorspronkelijke slingingering te bereiken. Op dit oogenblik zijn de slingeren echter weder rechtlijnig geworden. De figuren 4, 5, 6 zijn geconstrueerd met  $\psi = 150^\circ$ ; de geheele periode is daarbij in 8 gelijke deelen verdeeld; fig. 5 en fig. 6 stellen de normale en abnormale onderperiode voor van een geval, behoorende tot de klasse B. II; fig. 4 stelt bij dezelfde waarde van  $\psi$  een geval van de klasse B. I voor; eindelijk geeft fig. 7 een overzicht van de klasse B. I bij  $Tg^2 \psi > 1$ , waar alleen het geval I van de Klasse B voorkomt.

§ 5. *Betrekking tot de ongestoorde beweging.*

30. Construeert men verder (fig. 8) voor een geval, dat tot de klasse B behoort, de omgeschreven rechthoeken met aan de coördinatenassen evenwijdige zijden van de ellips; zoo neemt de waarde van  $f = \text{Arcsin } \sqrt{\alpha'}$ , die volgens n°. 17 deze rechthoeken bepaalt, (zie (101), vergeleken met de grondformule (A)), een maximum en minimum aan bij  $\text{Cos } 2(D + \delta) = \pm 1$ , d. i. in het midden der onderperioden. Deze waarden met  $f_M$  en  $f_m$  aanduidende, zijn

$$\text{Cos } 2f_m = \text{Cos}(\varepsilon - \psi'), \quad \text{Cos } 2f_M = \text{Cos}(\varepsilon + \psi').$$

Daar in het beschouwde geval  $\varepsilon - \psi'$  en  $\varepsilon + \psi'$  beide positief en kleiner dan  $180^\circ$  zijn, is

$$\left. \begin{array}{l} f_m = \frac{1}{2}(\varepsilon - \psi') \text{ de minimum} \\ \text{en } f_M = \frac{1}{2}(\varepsilon + \psi') \text{ de maximumwaarde van } f \end{array} \right\} \dots (146)$$

Wij zullen nu aantoonen, dat, terwijl  $\varepsilon$  het gemiddelde van  $f_m$  en  $f_M$  is, ook  $X_r$  of  $-X_r$  tusschen  $f_m$  en  $f_M$  valt, en in een zeer eenvoudig verband tot deze staat.

Uit (132) volgt

$$Tg^2 X_r = \frac{\text{Cos } \psi' - \text{Cos } \varepsilon}{\text{Cos } \psi' + \text{Cos } \varepsilon} = Tg \frac{1}{2}(\psi' + \varepsilon). Tg \frac{1}{2}(\varepsilon' - \psi'), (147)$$

of met (146)

$$Tg^2 X_r = Tg f_m. Tg f_M \dots \dots \dots (148)$$

In 't geval B. II bij zwevingen om de  $x$ -as, is  $f_m$  en  $f_M$  respectievelijk  $\chi_{ax}$  en  $\chi_{ax}$ , en bij zwevingen om de  $y$ -as  $f_m = 90^\circ - \chi_{ay}$  en  $f_M = 90^\circ - \chi_{ay}$ ; dus

$$\left. \begin{aligned} Tg^2 X_r &= Tg \chi_{ax} \cdot Tg \chi_{ax} \\ Tg^2 X_r &= Cotg \chi_{ay} \cdot Cotg \chi_{ay} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (149)$$

In deze klasse heeft dus de maximumellips, die zich in de normale onderperiode vertoont, eene kleinere; die, welke zich in de abnormale onderperiode vertoont, eene grootere verhouding van de kleine tot de groote as, dan die zich in de ongestoorde beweging ( $\gamma = 0$ ), dus in de LISSAJOUS'sche figuren (die tot de klasse B. II behooren) zou vertoonen; maar de meetkundig middenevenredige van beide eerste verhoudingen is gelijk aan de laatste. Wordt echter de invloed van de draaiing van het coördinatenstelsel zoo sterk, dat de gestoorde verschijnselen tot de klasse B. I behooren, en dus een geheel ander karakter dan de ongestoorde figuren van LISSAJOUS krijgen, dan is

$$\begin{aligned} f_m &= \chi_x \text{ en } f_M = 90^\circ - \chi_y, \\ Tg^2 X_r &= \frac{Tg \chi_x}{Tg \chi_y} \dots \dots \dots (150) \end{aligned}$$

In de klasse B. I, waar de symmetrie-as van wat bij B. II de abnormale periode was, als 't ware  $90^\circ$  verspringt, levert dus het quotient der maximumverhoudingen van kleine tot groote as het vierkant van de maximummassenverhouding, die zich in 't ongestoorde vraagstuk zou vertoonen; terwijl in de klasse B. II het product van die verhoudingen dit doet.

---

## HOOFDSTUK III.

### TOEPASSINGEN VAN HOOFDSTUK II EN BEHANDELING VAN EENIGE VRAAGSTUKKEN OVER SLINGERS VOLGENS DE METHODE VAN HAMILTON-JACOBI.

---

§ 1. *Proeven van FOUCAULT over de trillingen van een staaf, waarvan het eene uiteinde aan een draaiende as bevestigd is.*

31. Wij zullen nu eenige verschijnselen bespreken, in welke men door de voorafgaande beschouwingen een helder inzicht verkrijgt.

In de eerste plaats vestigen wij de aandacht op de proeven, die in de *Fortschritte der Physik* in 1850—51 als volgt beschreven worden:

„Hr. FOUCAULT macht einige neue Mittheilungen über den Versuch mit einem schwingenden Stabe, welcher auf der Welle einer Drehbank befestigt ist. Er zeigt dass im Allgemeinen die Stahl-drähte, die man im Handel findet, weder homogen genug noch genau genug cylindrisch sind, um schwingende Stäbe bilden zu können, welche ihre Schwingungsebene unverändert beibehalten. Wenn diese Stäbe an einem Ende befestigt sind und nachdem man sie aus ihrer Gleichgewichtslage abgelenkt hat, sich selbst überlassen werden, so geben sie eine Reihe von Schwingungen, deren Figur um zwei besondere, auf einander senkrechte Richtungen herum unaufhörlich der Gestalt und der Lage nach sich verändert.

Wenn aber der haltende Apparat oder die Welle der Drehbank vorher in eine rotirende Bewegung versetzt ist, so treten ganz andere Erscheinungen ein. Welche auch die Richtung des dem Stäbe mitgetheilten ersten Impulses und welche die daraus entstandene

Schwingungsart ist, mag diese elliptisch, kreisförmig rechtsdrehend oder linksdrehend sein, jedesmal verharret die Schwingung in ihrer Gestalt und in ihrer Richtung; sie ist so zu sagen im Raume durch die Rotation des haltenden Apparats fixirt, welche den dünnen Metallstab von den Fehlern in der Homogenität oder in der cylindrischen Gestalt frei macht. Hr. FOUCAULT schloss früher, dass beim Pendel ähnlich die Schwingungsebene von der Rotation des Aufhängspunkts unabhängig sein müsse."

Wij nemen aan, dat de as van den staaf met de as van draaing samenvalt; noemen de draaingssnelheid om deze  $\gamma$ ; en duiden met  $x_i, y_i$  de afwijkingen van een punt  $i$  op de as van den staaf aan, in een vlak loodrecht op deze en ten opzichte van een linksch, (zie n°. 2), rechthoekig coördinatensysteem, waarvan de oorsprong in de draaiingsas, en de assen voortdurend in de door FOUCAULT aangeduide hoofdrichtingen van den staaf vallen. Verder nemen wij aan, dat de afwijkingen oneindig klein zijn; dat de verdeling der massa's om de as symmetrisch is; en dat het verschil van de trillingsduur in twee verschillende richtingen alleen het gevolg is van verschillende veerkracht. Dan is in de ongestoorde beweging de krachtfunctie weer van den vorm (90), en de levende kracht

$$T = v(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2),$$

waar  $v$  eene standvastige is, die van de verdeling der massa's afhangt. Volgens n°. 9 wordt de storingsfunctie, afkomstig van de beweging der coördinatenassen, wanneer wij het gedeelte dat van de tweede orde is, nl.  $G - \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  als in n°. 16 verwaarloozen,

en omdat  $K = 0$  is, gelijk aan  $-L$ . Volgens (9) is

$$L = v\gamma(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i);$$

en wanneer wij het punt, welks coördinaten  $x_i, y_i$  worden, nog zóo op de as van den staaf kiezen, dat  $v = 1$ , verkrijgen wij juist dezelfde karakteristieke functie en storingsfunctie als die, welke wij in Hoofdstuk II, § 1 behandelden. Daar men mag aannemen, dat  $\gamma$  klein is tegenover het aantal trillingen van den staaf in eene seconde, en bij deze proeven  $p - q$  wederom zeer klein ten opzichte van  $\gamma$  was, wordt dus ten opzichte van de draaiende coördinatenassen de beweging van het waargenomen punt bepaald door de constructie (C) in Hoofdstuk II, § 2. De bewegingsvormen in de volstreckte beweging volgen elkaar juist zoo op als in de betrekkelijke; maar zij hebben ten opzichte van het volstreckte rustend coörd-

dinatenstelsel eene andere ligging. Men vindt deze, wanneer men de lengten in de constructie (C) niet van uit het punt P meet, maar van uit een punt, dat zich uit P over den lengtecirkel met de gelijkmatige snelheid  $-2\gamma$  voortbeweegt. Is nu, gelijk in de bedoelde proeven,  $q-p$  zeer klein ten opzichte van  $\gamma$ , dus volgens (115)  $Tg\psi$  zeer groot, zoo is de hoek  $90 \sim \psi$  in de constructie (C) zeer klein, en vallen de lengte- en de tijdscirkel nagenoeg samen; bij de verschuiving van den karakteristieken cirkel verandert de hoek  $90 + \left[ \pm \right] \frac{\cos\psi}{\sqrt{\cos^2\psi}} 2\chi$ , die den vorm der slingeringskromme bepaalt, slechts zeer weinig; en verschuift het knooppunt van den karakteristieken- en den lengtecirkel nagenoeg met de snelheid  $-\frac{2\gamma}{\sin\psi}$ ; de afstand van dit knooppunt tot het denkbeeldig punt, dat uit P met de snelheid  $-2\gamma$  over den lengtecirkel loopt, (en de ligging van de vaste coördinatenas ten opzichte van de bewegende voorstelt), verandert derhalve slechts zeer weinig. Dus blijven vorm en ligging der volstreckte slingeringen tamelijk onveranderd.

Wanneer de verdeling van de massa's om de as niet gelijkmatig is, zijn er twee richtingen loodrecht op elkaar, waarin bij dezelfde snelheid van afwijking de levende kracht een maximum of een minimum is; en wanneer men deze richtingen als  $xy$ -assen neemt, heeft zij in 't algemeen den vorm

$$T = v_1 \dot{x}_i^2 + w_1 \dot{y}_i^2,$$

waar  $v_1$  en  $w_1$  van de verdeling der massa's afhankelijke standvastigheden zijn, wier verschil bij FOUCAULT's proeven met  $\gamma$  vergeleken slechts eene kleine grootheid was. Wanneer de hoofdrichtingen voor de veerkracht met die voor de verdeling der massa's samenvallen, wordt de krachtfunctie

$$U^{(a)} = -\frac{1}{2}(p^2 x_i^2 + q^2 y_i^2);$$

de storingsfunctie blijft

$$L = v_1 \gamma (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

Men brengt dit geval tot het vorige terug door de substitutie

$$w_1 y_i^2 = v_1 y_i'^2, \quad q^2 \frac{v_1}{w_1} = q'^2;$$

dus vindt men de bewegingen in dit geval uit die in het vorige, wanneer men voor  $q-p$ ,  $p \left( \frac{q}{p} \sqrt{\frac{v_1}{w_1}} - 1 \right)$  neemt, en elke slingerings-

kromme met het oogenblikkelijk coördinateustelsel der  $x, y$  in de verhouding  $\sqrt{v_1} : \sqrt{w_1}$  in de richting van de  $y$ -as uittrekt. Omdat deze verhouding slechts zeer weinig van 1 afwijkt, heeft dit slechts eene zeer kleine verandering in vorm en ligging der slingeringskrommen ten gevolge. Dus blijven weer vorm en ligging der slingeringskrommen in de volstreekte beweging nagenoeg onveranderd.

Terwijl in het vorige de juiste verklaring der proeven van FOUCAULT over slingerende staven gezocht moet worden in de, nagenoeg met de proeven overeenstemmende, onderstelling dat de hoofdrichtingen voor levende kracht en veerkracht samenvallen, blijkt er tevens uit, dat eene menigte andere opmerkelijke verschijnselen zich bij andere waarden van  $\gamma$  en  $q-p$  vertoond zouden hebben.

32. Eindelijk kan het meest algemeene geval, dat nl. de verdeling der massa's zoowel als de weerstand der veerkracht tegen buiging in verschillende richtingen verschillend is, en de hoofdrichtingen voor de veerkracht en voor de verdeling der massa's niet samenvallen, tot elliptische integralen worden teruggebracht. Noemen wij de hoofdrichtingen voor de levende kracht weder  $x, y$ , die voor de veerkracht  $x', y'$ , zoodat

$$U^{(a)} = -\frac{1}{2}(px_i'^2 + qy_i'^2)$$

is; nemen wij verder tusschen de  $x_i, y_i$  en de  $x_i', y_i'$

$$x_i' = x_i \cos \psi + y_i \sin \psi, \quad y_i' = y_i \cos \psi + x_i \sin \psi$$

als vergelijking aan; dan wordt

$$-2U^{(a)} = p'^2 x_i^2 + q'^2 y_i^2 + (p-q) \sin 2\psi \cdot x_i y_i,$$

waar

$$p'^2 = p \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi, \quad q'^2 = q \cos^2 \psi + p \sin^2 \psi.$$

Neemt men weer aan, dat het punt, welks coördinaten  $x_i$  en  $y_i$  wij nagaan, zoo op de as van den staaf gekozen is, dat  $v = 1$ ; en maakt men weer gebruik van de substitutie

$$w_1 y_i^2 = v_1 y_i''^2, \quad q'^2 = q'^2 \frac{v_1}{w_1};$$

zoo wordt de karakteristieke functie voor ons vraagstuk

$$\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \frac{1}{2} p'^2 x_i^2 + \frac{1}{2} q''^2 y_i''^2 + \frac{1}{2} (p-q) \sin 2\psi \cdot x_i y_i - L.$$

Wij moeten dus nu, om dezelfde ongestoorde beweging als in n°. 31 te verkrijgen,

$$\frac{1}{2} (p-q) \sin 2\psi \cdot x_i y_i - L = S_1$$

als storingsfunctie beschouwen. Volgens (93) en (96), en omdat men van  $2 \sin p' t' \cdot \sin q' t'$  slechts  $\cos T_0$  in aanmerking behoeft te nemen, wordt

$$S = \left[ \frac{1}{2} \frac{p-q}{p'q''} \sin 2\psi \cdot \cos T_0 + \frac{2\gamma}{p'} \sin T_0 \right] \sqrt{(h-\alpha_0)\alpha_0},$$

en  $l = \frac{p-q}{4p'} \sin 2\psi$  stellende, weer met (100)

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}(\gamma \cos T_0 - l \sin T_0),$$

$$\frac{dT_0}{dt} = q'' - p' + \frac{1-2\alpha'}{\sqrt{(1-\alpha')\alpha'}}(\gamma \sin T_0 + l \cos T_0).$$

Wij voeren nu nieuwe coördinaten  $\xi''_i, \eta''_i$  in, door

$$\xi''_i = x_i \cos \psi_D - y_i \sin \psi_D, \quad \eta''_i = y_i \cos \psi_D + x_i \sin \psi_D,$$

met de  $x_i, y_i$  verbonden, en brengen  $\xi''_i$  en  $\eta''_i$  in den vorm

$$\xi''_i = \sqrt{2h(1-\alpha')} \cos pt'', \quad \eta''_i = \sqrt{2h\alpha'} \cos(pt'' + \vartheta);$$

zoodat de elementen  $a'$  en  $\vartheta$  in plaats van  $\alpha'$  en  $T_0$  komen.

Met  $a' = (1-\alpha') \cos^2 \psi_D + \alpha' \sin^2 \psi_D - \sin 2\psi_D \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')}$ ,

en  $\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \cos \vartheta = \sin 2\psi_D + 2\sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \cos 2\psi_D \cos T_0$ ,

volgt dan uit de gevonden differentiaalquotienten van  $\alpha'$  en  $T_0$

$$\frac{da'}{dt} = -2\gamma \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \cos \vartheta - \sin T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} ((q''-p) \sin 2\psi_D - l \cos \psi_D).$$

De laatste term valt weg, wanneer wij de nieuwe assen zoo kiezen,

$$\text{dat} \quad T_0 \sin 2\psi_D = \frac{l}{q''-p'}; \quad \text{met} \quad f = \sqrt{l^2 + (q''-p)^2},$$

en omdat volgens zijne meetkundige beteekenis

$$2\sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \sin T_0 = 2\sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \sin \vartheta$$

is, wordt verder

$$\begin{aligned} \frac{d(\sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \sin \vartheta)}{dt} &= 2(1-2\alpha')l + 2\sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \cos T_0 (q''-p) = \\ &= 2f \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat de veranderingen der nieuwe elementen door vergelijkingen van geheel denzelfden vorm bepaald worden, als wanneer  $l = 0$  was en dat dus de bewegingsverschijnselen ten opzichte van deze nieuwe assen weder die van Hoofdstuk II, maar met de standvastige  $f$  in plaats van  $q-p$  zijn, tot dezelfde uitkomst zou men gekomen zijn door terstond de coördinaten  $\xi''_i$  en  $\eta''_i$  in de karakteristieke functie in te voeren; wij hebben echter deze afleiding gekozen om uit te laten komen dat de differentiaalvergelijkingen voor  $\alpha$  en  $T_0$  ook wanneer men voor de coördinatenassen niet de symmetrieassen kiest, denzelfden vorm behouden.

§ 2. *Oneindig kleine bewegingen van een lichaam, dat zich vrij om een punt bewegen kan, wanneer het aan de zwaartekracht onderworpen is, en men van de draaiing der aarde afziet.*

33. Dit vraagstuk levert eene tweede toepassing. Voor het geval, dat het lichaam een omwentelingslichaam is, welks zwaartepunt in zijne as valt, is de beweging ook voor eindige amplituden bekend, en reeds door LAGRANGE behandeld en door LOTTNER <sup>1)</sup> tot elliptische functiën teruggebracht. Ligt het zwaartepunt wel op een der traagheidsassen, maar zijn de drie traagheidsmomenten allen ongelijk, zoo is om het vraagstuk in eindigen vorm te kunnen oplossen reeds de onderstelling noodig, dat de snelheden oneindig klein blijven (zie echter § 6). Dan geven § 1 en § 2 van Hoofdst. II weder een helder inzicht in de wetten der beweging; dit blijft ook bij willekeurige ligging van het zwaartepunt het geval; het beginsel dier toepassing blijkt echter voldoende uit het gestelde meer eenvoudig geval.

Nemen wij twee coördinatenstelsels met den oorsprong in het ophangpunt van den slinger aan, een vast in de ruimte, dat der  $u, v, w$ , en een vast met den slinger verbonden, dat der  $\xi, \eta, \zeta$ . Laat beide linksch (zie n<sup>o</sup>. 2), en verder zoo gekozen zijn, dat de  $+w$ -as de naar beneden gerichte verticaal is, de  $\xi, \eta, \zeta$ -assen de hoofdtraagheidsassen voor het ophangpunt zijn, en dat zij in den evenwichtsstand van den slinger met de  $u, v, w$ -assen samenvallen. De ligging van den slinger willen wij dan als volgt bepalen: men draaie het  $\xi, \eta, \zeta$  systeem links om de  $\zeta$ -as, totdat de  $\xi$ -as met zijne oorspronkelijke ligging den hoek  $\rho$  insluit, dan om den nieuwen stand van de  $\xi$ -as wederom  $\phi$  naar links, en eindelijk om de  $\eta$ -as, in den stand, welke zij nu verkregen heeft, eveneens  $\theta$  naar links. Dan is

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ v &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ w &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (151)$$

wanneer

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \text{Cos } \theta \cdot \text{Cos } \rho - \text{Sin } \phi \cdot \text{Sin } \theta \cdot \text{Sin } \rho, & \alpha_2 &= -\text{Cos } \phi \cdot \text{Sin } \rho, \\ & \alpha_3 = \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \rho + \text{Sin } \phi \cdot \text{Cos } \theta \cdot \text{Sin } \rho, \\ \beta_1 &= \text{Sin } \phi \cdot \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \rho + \text{Cos } \theta \cdot \text{Sin } \rho, & \beta_2 &= \text{Cos } \phi \cdot \text{Cos } \rho, \\ & \beta_3 = -\text{Sin } \phi \cdot \text{Cos } \theta \cdot \text{Cos } \rho + \text{Sin } \theta \cdot \text{Sin } \rho, \\ \gamma_1 &= -\text{Cos } \phi \cdot \text{Sin } \theta, & \gamma_2 &= \text{Sin } \phi, & \gamma_3 &= \text{Cos } \phi \cdot \text{Cos } \theta. \end{aligned} \right\} (152)$$

Hieruit volgen de ontbondenen  $p', q', r'$  der draaiingssnelheid van den slinger, volgens de oogenblikkelijke richtingen van de  $\xi, \eta, \zeta$ ,

<sup>1)</sup> CRELLE, Bd. 50.

$$\left. \begin{aligned} p' &= \text{Cos } \theta \frac{d\phi}{dt} - \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \phi \frac{d\rho}{dt}, \\ q' &= \frac{d\theta}{dt} + \text{Sin } \phi \frac{d\rho}{dt}, \\ r' &= \text{Sin } \theta \frac{d\phi}{dt} + \text{Cos } \theta \cdot \text{Cos } \phi \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (153)$$

Verder wordt de uitdrukking van de levende kracht  $T$ , volgens (20), wanneer  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  de traagheidsmomenten om die assen zijn,

$$T = \frac{1}{2}(Pp'^2 + Qq'^2 + Rr'^2) = \frac{1}{2} \left[ (1.1) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + (2.2) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (3.3) \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + 2(1.3) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\rho}{dt} + 2(2.3) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\rho}{dt} \right], \dots (154)$$

$$\text{waar} \quad \left. \begin{aligned} (1.1) &= P \text{Cos}^2 \theta + R \text{Sin}^2 \theta, \\ (2.2) &= Q, \\ (3.3) &= (P \text{Sin}^2 \theta + R \text{Cos}^2 \theta) \text{Cos}^2 \phi + Q \text{Sin}^2 \phi, \\ (1.3) &= (3.1) = (R - P) \text{Cos } \theta \cdot \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \phi, \\ (2.3) &= (3.2) = Q \text{Sin } \phi. \end{aligned} \right\} \dots (155)$$

Volgens (24) is

$$D = \begin{vmatrix} (1.1), 0, (1.3) \\ 0, (2.2), (2.3) \\ (3.1), (3.2), (3.3) \end{vmatrix} = (1.1)[(2.2)(3.3) - (2.3)^2] - (1.3)^2(2.2); (156)$$

$$D = PQR \text{Cos}^2 \phi,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial (1.1)} &= Q(P \text{Sin}^2 \theta + R \text{Cos}^2 \theta) \text{Cos}^2 \phi, \\ \frac{\partial D}{\partial (1.2)} &= (2.3)(3.1) - (2.1)(3.3) = \\ &= Q(R - P) \text{Sin } \phi \cdot \text{Cos } \phi \cdot \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \theta, \\ \frac{\partial D}{\partial (2.2)} &= Q \text{Sin}^2 \phi (P \text{Cos}^2 \theta + R \text{Sin}^2 \theta) + P R \text{Cos}^2 \phi, \\ \frac{\partial D}{\partial (3.3)} &= Q(P \text{Cos}^2 \theta + R \text{Sin}^2 \theta), \\ \frac{\partial D}{\partial (1.3)} &= Q(P - R) \text{Cos } \theta \cdot \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \phi, \\ \frac{\partial D}{\partial (2.3)} &= -Q(P \text{Cos}^2 \theta + R \text{Sin}^2 \theta) \text{Sin } \phi. \end{aligned} \right\} (157)$$

en wordt de karakteristieke functie van het stelsel (zie n<sup>o</sup>. 4) volgens (30)

$$\begin{aligned}
H_1 = & \frac{P \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta}{2PR} p_1^2 + \left( \frac{1}{2Q} + \frac{P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta}{2PR} Tg^2 \phi \right) p_2^2 + \\
& + \frac{P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta}{2PR \cos^2 \phi} p_3^2 + \frac{(R-P) \cos \theta \cdot \sin \theta}{PR} Tg \phi \cdot p_1 p_2 + \\
& + \left\{ -\frac{P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta}{P \cos \phi} Tg \phi \cdot p_2 + \frac{P-R}{P \cos \phi} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot p_1 \right\} \frac{p_3}{R}, \quad (158)
\end{aligned}$$

waar nu 
$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}.$$

De krachtfunctie is, wanneer met  $M$  het product van de massa van den slinger, den afstand van het zwaartepunt tot het ophangpunt en de versnelling der zwaartekracht aangeduid wordt,  $U = M \cos \phi \cdot \cos \theta$ ; dus is voor oneindig kleine waarden van  $p_1, p_2, p_3, \phi$  en  $\theta$ , en wanneer geen der traagheidsmomenten oneindig klein ten opzichte van de beide anderen is, — welk geval wij in deze § uitzonderen; — de karakteristieke functie van het stelsel, tot op grootheden van de derde orde,

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2P} + \frac{p_2^2}{2Q} + \frac{p_3^2}{2R} + \left\{ \left(1 - \frac{R}{P}\right) \theta p_1 - \phi p_2 \right\} \frac{p_3}{R};$$

en de karakteristieke functie voor dit vraagstuk (zie n°. 4)

$$H = H_1, \quad -U = E + S_2,$$

wanneer 
$$E = \frac{p_1^2}{2P} + \frac{p_2^2}{2Q} + \frac{p_3^2}{2R} + \frac{M}{2} \phi^2 + \frac{M}{2} \theta^2 - M, \dots \quad (159)$$

en met 
$$\frac{p_1}{P} = \frac{d\phi}{dt}, \quad \frac{p_2}{Q} = \frac{d\theta}{dt},$$

$$S_2 = \left[ (P-R) \theta \frac{d\phi}{dt} - Q \phi \frac{d\theta}{dt} \right] \frac{p_3}{R} \dots \dots \dots (160)$$

$S_2$  mag, ofschoon van de derde orde zijnde, niet altijd tegen de grootheden van de tweede orde verwaarloosd worden, daar het in sommige gevallen in verloop van tijd eene merkbare verandering geven kan; wij zullen het dus als storingsfunctie beschouwen. De gedeeltelijke differentiaalvergelijking, die met  $E$  overeenkomt, behandelen wij nu als in § 1, Hoofdst. II; wij nemen

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \rho_0,$$

eene nieuwe willekeurige standvastige, zoodat dus  $p_3 = \rho_0$ , en schrijven

$$h' = h - \frac{\rho_0^2}{2R}; \dots \dots \dots (161)$$

dan is, bij invoering van overeenkomstige  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\tau$  en van eene nieuwe willekeurige standvastige  $\rho_1$ ,

$$dV = -h dt + \rho_0 d\rho + \sqrt{2Q} \sqrt{\alpha_0 - \frac{1}{2} M \theta^2} d\theta + \sqrt{2P} \sqrt{h^2 - \alpha_0 - \frac{1}{2} M \phi^2} d\phi$$

en het stelsel van canonische integralen

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{2(h' - \alpha_0)}{M}} \text{Sin } p t', & \theta &= \sqrt{\frac{2\alpha_0}{M}} \text{Sin } q t'', \\ \rho &= -\rho_1 + (t - \tau) \frac{\rho_0}{R} \text{ met } p_3 = R \frac{d\rho}{dt} = \rho_0, \\ p_1 &= \sqrt{2P(h' - \alpha_0)} \text{Cos } p t', & p_2 &= \sqrt{2Q\alpha_0} \text{Cos } q t', & p_3 &= \rho_0, \end{aligned} \right\} (162)$$

stellende

$$p = \sqrt{\frac{M}{P}}, \quad q = \sqrt{\frac{M}{Q}}, \quad t' = t - \tau, \quad t'' = t - \tau - \beta_0.$$

De storingsfunctie  $S_2$ , in de elementen uitgedrukt, wordt dus

$$S_2 = \frac{2\rho_0}{RM} [(P - R)p \text{Sin } q t'' \cdot \text{Cos } p t' - Qq \text{Sin } p t' \cdot \text{Cos } q t''] \sqrt{(h' - \alpha_0)\alpha_0}.$$

In  $S_2$  komt  $\rho_1$  niet voor, en daar volgens (17)

$$\frac{d\rho_0}{dt} = \frac{\partial S_2}{\partial \rho_1},$$

blijft in de gestoorde beweging  $\rho_0$ , en dus ook  $\frac{d\rho}{dt}$ , standvastig.

Ter bepaling van  $\rho_1$  als functie van den tijd dient

$$\frac{\partial S_2}{\partial \rho_0} = -\frac{d\rho_1}{dt}.$$

Bij deze differentiatie verkrijgt men grootheden van de tweede orde, zoodat men ook  $\rho_1$  als standvastige beschouwen mag; dan echter hebben  $\rho_0$  en  $\rho_1$  voor de oplossing van het vraagstuk geene andere beteekenis meer, als dat zij de ligging van het coördinatenstelsel bepalen, ten opzichte waarvan op elk tijdstip de  $\phi$  en  $\theta$  door de andere vergelijkingen worden bepaald.

Dergelijke beschouwingen als in § 1, Hoofdst. II bewijzen, dat van  $S_2$  slechts

$$\frac{2\rho_0}{R} \left[ -\frac{(P-R)p + Qq}{2M} \text{Sin}(p t' - q t'') \right] \sqrt{(h' - \alpha_0)\alpha_0}$$

in aanmerking komen kan; zoodat met (95)

$$S_2 = \frac{\rho_0}{R} \frac{2P-R}{\sqrt{RM}} \text{Sin } T_0 \sqrt{(h'-\alpha_0)\alpha_0},$$

of

$$S_2 = \frac{2P-R}{\sqrt{RM}} \frac{d\rho}{dt} \text{Sin } T_0 \sqrt{(h'-\alpha_0)\alpha_0} \dots \dots (163)$$

Deze  $S_2$  heeft dus voor het vraagstuk slechts dan beteekenis, wanneer  $P$  en  $Q$  nagenoeg gelijk zijn; is dit niet het geval, dan geeft (162) (LISSAJOUS' figuren ten opzichte van het door  $\rho_0$  en  $\rho_1$  bepaalde draaiende coördinatenstelsel) terstond de volledige oplossing.

Om deze ook aan te geven voor het geval, dat  $P$  en  $Q$  nagenoeg gelijk zijn, leggen wij door het punt  $w = \sqrt{P}$ ,  $u = 0$ ,  $v = 0$  op de  $w$ -as een horizontaal vlak, en beschouwen de beweging van het snijpunt van de bewegende  $\xi$ -as met dit vaste vlak. Wanneer op een bepaald tijdstip eene oneindig kleine draaiing van den slinger om de  $\xi$ -as, wier ligging op dit oogenblik door  $\rho$  wordt bepaald, plaats vindt, beweegt dat snijpunt zich in eene richting, die wij als coördinatenas der  $x$  in dit vlak zullen beschouwen. Vindt daarentegen op hetzelfde oogenblik eene andere draaiing  $\theta$  plaats om de  $\eta$ -as, bepaald door de waarde van  $\rho$  op dat oogenblik en door  $\phi = 0$ , zoo zal zich het snijpunt van de  $\xi$ -as met dit vlak in eene richting loodrecht op die der  $x$  bewegen, die wij als coördinatenas der  $y$  zullen nemen. Wij hebben zoo een coördinatenstelsel verkregen, waarin, ten opzichte van de  $+x$ -as, de  $y$ -as links omgaande op de  $x$ -as volgt; dat tot oorsprong heeft de ligging van het beschouwde snijpunt bij  $\phi = 0$  en  $\theta = 0$ ; en dat om de  $+x$ -as met de snelheid  $\frac{d\rho}{dt}$  draait.

De vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{1}{p} \sqrt{2(h'-\alpha_0)} \text{Sin } p t', & y_i &= \frac{1}{q} \sqrt{2\alpha_0} \text{Sin } q t', \\ S_2 &= \frac{2\gamma'}{p} \text{Sin } T_0 \sqrt{(h'-\alpha_0)\alpha_0}, \end{aligned} \right\} \dots (164)$$

waar

$$\gamma' = \frac{2P-R}{2P} \frac{d\rho}{dt} \dots \dots \dots (165)$$

gesteld werd, drukken de beweging van het snijpunt van de  $\xi$ -as in zijne beweging met den slinger ten opzichte van het om zijn oorsprong draaiende coördinatenstelsel der  $xy$  uit, en zijn dezelve als de in § 1, Hoofdst. II behandelde, wanneer men aan  $\gamma$  de waarde  $\gamma'$  geeft.

Om de volstreckte beweging te kennen, waarin dezelfde slingeringsvormen, maar anders gelegen, voorkomen, moet men in de overeenkomstige constructie (C) de lengte van het knooppunt van den karakteristieken- en den lengtecirkel meten van uit het punt, dat zich met de gelijkmatige lengtesnelheid  $-2 \frac{d\rho}{dt}$  uit P over den lengtecirkel voortbeweegt.

34. Bij dezelfde waarden van  $\frac{d\rho}{dt}$  en  $p - q$  nadert  $\gamma'$  tot het grensgeval  $\gamma' = 0$ , wanneer  $\frac{2P - R}{2P}$  kleiner wordt, of wat hetzelfde is, de gedaante van het draaiend lichaam meer en meer tot die van eene cirkelvormige schijf nadert.

Beschouwen wij eerst dit grensgeval.

Men neemt dan ten opzichte van de  $xy$ -assen de figuren van LISSAJOUS waar. In de volstreckte beweging zou men dus dezelfde slingeringsvormen elkaar zien opvolgen, maar de groote as van die krommen zou op elk oogenblik  $\frac{d\rho}{dt} t$  in den zin van de beweging verschoven zijn, wanneer men bij het begin der waarneming  $t = 0$  stelt; de vorm der ellipsen wordt bij aanvankelijk vlakke slingeringen bepaald door  $x_0$ , het azimuth der beginslingering ten opzichte van de gelijktijdige projectie van de traagheidsassen van het ophangpunt, (de  $xy$ -assen in hunne ligging bij  $t = 0$ ); en de maximumverhouding van de kleine as tot de groote is  $Tg x_0$  of  $Coty x_0$ , al naarmate de figuren zweven om de  $x$ -as of om de  $y$ -as. Het gebied, dat de groote as der ellipsen in den zin van  $\frac{d\rho}{dt}$  doorloopt, wordt dus uitgebreid; en de hoek, wiens tangens de maximumassenverhouding aangeeft, is in deze onderperiode kleiner dan de halve hoek tusschen de oorspronkelijke en de eerstvolgende regtlijnige slingering. Het gebied, dat in tegengestelden zin wordt doorlopen, krimpt in; de ellipticiteitshoek is in deze onderperiode kleiner dan de halve hoek tusschen de oorspronkelijke en de eerstvolgende rechtlijnige slingering; zij is dus gedurende deze onderperiode kleiner dan volgen zoude uit den hoek van hare begin- en eindslingering. Ja, wanneer  $\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2} < \frac{\sqrt{(p-q)^2}}{\pi} 2x_0$  is, ligt dit gebied geheel aan de tegengestelde zijde van de beginslingering, als waar het gebied, dat met deze onderperiode in de figuren van LISSAJOUS overeenkomt, vallen zoude.

Zooals in dit onbereikbaar grensgeval de opvatting van de bewegingsverschijnselen als draaiende figuren van LISSAJOUS het helderste inzicht er in zou geven, zal men in 't algemeen, en in 't bijzonder voor 't geval, dat  $R$  ten opzichte van  $P$  klein en dus  $\gamma'$  nagenoeg  $\frac{d\rho}{dt}$  is, de bewegingsverschijnselen het best overzien door ze op te vatten als ontstaan door draaiing der in § 1 en § 2 door mij beschreven figuren om eene as loodrecht op hun vlak.

Komen bijv. abnormale perioden voor, zoo wordt hun gebied grooter; terwijl het gebied der normale perioden, die immers met eene snelheid grooter dan  $\frac{d\rho}{dt}$  doorloopen worden, geheel valt aan de zijde tegengesteld aan  $\frac{d\rho}{dt}$ , ligt het gebied van de abnormale perioden weder in den zin van  $\frac{d\rho}{dt}$  hier overheen, en eindigt aan die zijde van de oorspronkelijke slinginging, waarheen  $\frac{d\rho}{dt}$  gericht is. De eindslingering is dan (zie (126))

$$\frac{d\rho}{dt} \Pi = \frac{d\rho}{dt} \frac{2\pi}{\sqrt{(p-q)^2}} \text{Cos } \psi',$$

van uit de oorspronkelijke ligging verschoven, of, omdat volgens (165) en (115)

$$2 \frac{2P-R}{2P} \frac{d\rho}{dt} = (q-p) Tg \psi'$$

is,

$$\pi \frac{2P}{2P-R} \text{Sin } \psi',$$

in den zin van  $\frac{d\rho}{dt}$ .

Komen geen abnormale perioden voor en beweegt dus de groote as steeds in dezelfde richting verder, zoo valt ook aan het einde van de geheele periode de slinginging in het azimuth

$$\pi \left( 1 - \frac{2P}{2P-R} \text{Sin } \psi' \right),$$

van de oorspronkelijke slinginging uit in den zin, die aan  $\frac{d\rho}{dt}$  tegengesteld is, gemeten.

### § 3. *Behandeling van hetzelfde vraagstuk met inachtneming van de draaiing der aarde.*

35. Deze levert eene derde toepassing. De karakteristieke functie is daarbij samengesteld uit die van het stelsel, uit de negatieve

krachtfunctie der algemeene aantrekkingskracht ten opzichte van het in de aarde vaste stelsel der  $u, v, w$  in zijne oogenblikkelijke ligging, en volgens (63) uit

$$- \left( K + L + G - \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \frac{\partial L}{\partial q_r} \frac{\partial L}{\partial q_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (rs)} \right).$$

In n<sup>o</sup>. 36 zullen wij bewijzen, dat dit eenvoudig  $-(K+L)$  is.  $K, G$  en  $L$  moeten volgens (6), (7), (9) bepaald worden uit de beweging van het ophangpunt,  $u = 0, v = 0, w = 0$ , met de aarde, en uit de draaiing der  $u, v, w$ -assen met de aarde om het ophangpunt. De in n<sup>o</sup>. 2 aangegeven beteekenis van  $G$  en  $L$  stelt ons in staat hunne uitdrukkingen voor dit geval terstond neer te schrijven. Zijn  $\alpha, \beta, \gamma$  de componenten van de draaiingssnelheid der aarde volgens de  $\xi, \eta, \zeta$ -assen in den stand, die zij op het beschouwde tijdstip innemen, zoo is namelijk

$$\left. \begin{aligned} L &= Pp'\alpha + Qq'\beta + Rr'\gamma, \\ 2G &= P\alpha^2 + Q\beta^2 + R\gamma^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (166)$$

Is verder  $U^{(a)}$  de krachtfunctie van de algemeene aantrekkingskracht op den slinger, zoo is de SCHERING'sche krachtfunctie in de betrekkelijke beweging ten opzichte van het in de aarde vaste stelsel der  $u, v, w, U^{(a)} + K + G + L$ , volgens (10). Voor elke ligging van den betrekkelijk in rust verkeerenden slinger wordt de kracht, die er op werkt, bepaald door de krachtfunctie  $U^{(a)} + K + G$ ; dit is dus de krachtfunctie der zwaartekracht. Beschouwt men de zeer geringe draaiingssnelheid der aarde als klein van de eerste orde, en kiest men als  $w$ -as den evenwichtsstand van de verbindingslijn van zwaartepunt en ophangpunt; zoo wordt deze krachtfunctie, tot op grootheden van de tweede orde, nauwkeurig door  $M \cos \phi \cdot \cos \theta$  uitgedrukt. Ook  $G$  kan als grootheid van de tweede orde verwaarloosd worden. Dus blijft voor de karakteristieke functie

$$E + S - L - M \cos \phi \cdot \cos \theta.$$

Hierin is bij oneindig kleine amplituden, en de ontbondenen der draaiingssnelheid van de aarde volgens de assen der  $u, v, w$ , met  $\alpha_u, \beta_v, \gamma_w$  aanduidende,

$$\begin{aligned} L &= P \left( \frac{d\phi}{dt} - \theta \frac{d\rho}{dt} \right) \{ \alpha_u \cos \rho + \beta_v \sin \rho - \theta \gamma_w \} + \\ &+ Q \left( \frac{d\theta}{dt} + \phi \frac{d\rho}{dt} \right) \{ -\alpha_u \sin \rho + \beta_v \cos \rho + \phi \gamma_w \} + \\ &+ R \left( \theta \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \right) \{ (\theta \cos \rho + \phi \sin \rho) \alpha_u + (\theta \sin \rho - \phi \cos \rho) \beta_v + \gamma_w \}. \end{aligned} \quad (167)$$

Wij schrijven dit in den vorm:

$$L = L_{01} \frac{d\Phi}{dt} + L_{02} \frac{d\theta}{dt} + L_{03} \frac{d\rho}{dt} + L_{11} \Phi \frac{d\Phi}{dt} + L_{12} \Phi \frac{d\theta}{dt} + L_{22} \theta \frac{d\theta}{dt} + \\ + L_{13} \Phi \frac{d\rho}{dt} + L_{23} \theta \frac{d\rho}{dt} + L_{31} \rho \frac{d\Phi}{dt},$$

waar de  $L_{01}$ ,  $L_{02}$  enz. geene andere veranderlijke dan  $\rho$  bevatten, en van de orde van de draaiingssnelheid der aarde zijn; en ontbinden de karakteristieke functie in

$$\left. \begin{aligned} E' &= E - \frac{L_{01}}{P} p_1 - \frac{L_{02}}{Q} p_2 - \frac{L_{03}}{R} p_3 - \frac{1}{R} \frac{\partial L_{01}}{\partial \rho} p_3 \Phi - \\ &\quad - \frac{1}{R} \frac{\partial L_{02}}{\partial \rho} p_3 \theta - \frac{1}{R} \frac{\partial L_{03}}{\partial \rho} p_3 \rho, \\ S' &= S_2 - L_{12} \Phi \frac{d\theta}{dt} - L_{21} \theta \frac{d\Phi}{dt}, \\ \text{en } S'' &= L_{11} \Phi \frac{d\Phi}{dt} + L_{22} \theta \frac{d\theta}{dt} + L_{13} \Phi \frac{d\rho}{dt} + L_{23} \theta \frac{d\rho}{dt} - \\ &\quad - \frac{p_3}{R} \left( \frac{\partial L_{01}}{\partial \rho} \Phi + \frac{\partial L_{02}}{\partial \rho} \theta + \frac{\partial L_{03}}{\partial \rho} \rho \right), \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

zoodat

$$H = E' + S' - S''.$$

De oplossing van de gedeeltelijke differentiaalvergelijking, die met  $E'$  (168) overeenkomt, kan men tot op grootheden van de tweede orde ten opzichte van de draaiingssnelheid der aarde, zooals door uitvoering der differentiatie blijkt, terugbrengen tot de bepaling van  $V$  door (159), wanneer men de overeenkomstige functie hier  $V'$  en

$$V' = V + L_{01} \Phi + L_{02} \theta + L_{03} \rho$$

stelt. Deze functie levert weer dezelfde canonische eindintegralen; voor de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , die wij hier een oogenblik met  $p_1'$ ,  $p_2'$ ,  $p_3'$  aanduiden zullen, terwijl wij voor de vroegere waarden dezelfde schrijfwijze behouden, vindt men echter

$$p_1' = p_1 + L_{01}, \quad p_2' = p_2 + L_{02}, \\ p_3' = p_3 + L_{03} + \\ + \Phi \frac{\partial L_{01}}{\partial \rho} + \theta \frac{\partial L_{02}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial L_{03}}{\partial \rho},$$

overeenkomstig de beteekenis, die  $p_1'$ ,  $p_2'$ ,  $p_3'$  (zie 36) nu hebben;

want, terwijl  $p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}}$  is, wordt  $p_1' = \frac{\partial T'}{\partial \dot{\Phi}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}}$ .

Voor de storingsfunctie komen, daar wij overal de tweede machten van de draaiingsnelheid der aarde verwaarloozen, deze verschillen niet in aanmerking. Behalve  $S_2$  zijn de termen, die  $L_{12}$  en  $L_{21}$  bevatten, de eenige van  $S'$  en  $S''$ , die gedurende langen tijd hetzelfde teeken vertoonen, en blijft dus alleen  $S'$  in aanmerking te nemen. In de  $L_{01}$  enz. (vergel. 167) komt  $\rho = -\rho_1 + \frac{f_0}{R}(t - \tau)$  voor, maar niet in  $L_{12}$  en  $L_{21}$ . Daar echter deze alleen in de storingsfunctie overblijven, en, volgens n<sup>o</sup>. 33,

$$\frac{\partial S}{\partial \rho_0} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial S}{\partial \rho_1} = 0,$$

blijft, wegens 
$$\frac{\partial S'}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial S'}{\partial \rho} = 0,$$

volgens (17) ook 
$$\frac{d\rho_1}{dt} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{d\rho_0}{dt} = 0;$$

dus  $\rho_0$  en  $\rho_1$  standvastig. Volgens (167) is

$$L_{12} = Q\gamma_w, \quad L_{21} = (-P + R)\gamma_w;$$

dus 
$$S' = S_2 + \gamma_w \left[ (P - R)\theta \frac{d\phi}{dt} - Q\phi \frac{d\theta}{dt} \right];$$

en deze grootheid onderscheidt zich van de  $S_2$  in het vorige vraagstuk (zie (160)) slechts daardoor, dat in plaats van

$$\frac{d\rho}{dt}, \quad \gamma_w + \frac{d\rho}{dt}$$

optreedt.

Voeren wij weer het  $x, y$  stelsel van het vorige vraagstuk in, zoo wordt de beweging van het snijpunt van de  $\zeta$ -as met het  $xy$ -vlak, ten opzichte van het  $x, y$  stelsel, door de constructie (C) gevonden, wanneer men voor  $\gamma$  de waarde

$$\gamma'' = \frac{2P - R}{2P} \left( \gamma_w + \frac{d\rho}{dt} \right) \dots \dots \dots (169)$$

(vergelijk 163) neemt. Om nu de betrekkelijke beweging ten opzichte van de aarde te vinden, moet men opmerken, dat de  $x, y$  om de loodrecht op hen staande  $w$ -as, ten opzichte van het  $u, v, w$  stelsel, met de snelheid  $\frac{d\rho}{dt}$  draaien; men verkrijgt haar dus, wanneer men in de met  $\gamma''$  uitgevoerde constructie de lengten telt van uit een punt, dat met de snelheid  $-\frac{2}{3}\frac{d\rho}{dt}$  over den lengtecirkel van uit  $P$  voortbeweegt.

36. Wij zullen nu zien, hoe bij een lichaam, dat vrij om een punt draaien kan, de storingsfunctie van de tweede orde voor de betrekkelijke beweging, die van de voorwaardevergelijkingen van het bewegende stelsel afhangt,

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} - G = 0$$

wordt (zie n<sup>o</sup>. 9).

Volgens (166) is  $L = P p' \alpha + Q q' \beta + R r' \gamma$ ,  
en volgens (153)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = P \cos \theta \alpha + R \sin \theta \gamma,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Q \beta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = R \cos \theta . \cos \phi \gamma - P \sin \theta . \cos \phi \alpha + Q \beta \sin \phi .$$

Vormen wij nu, met behulp van (157) en (156),

$$\begin{aligned} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial L}{\partial (r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} &= \frac{1}{2D} \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 \frac{\partial D}{\partial (1.1)} + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \frac{\partial D}{\partial (1.2)} + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 \frac{\partial D}{\partial (2.2)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \frac{\partial D}{\partial (1.3)} + \\ &\left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \frac{\partial D}{\partial (2.3)} + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right)^2 \frac{\partial D}{\partial (3.3)} \right\}. \end{aligned}$$

De coëfficiënt van  $\alpha^2$  tusschen de haakjes wordt

$$P^2 \cos^2 \theta (P \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta) Q \cos^2 \phi + P^2 \sin^2 \theta . \cos^2 \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) Q + \\ + 2(R - P) Q P^2 \sin^2 \theta . \cos^2 \theta . \cos^2 \phi = P^2 Q R \cos^2 \phi;$$

de coëfficiënt van  $\beta^2$

$$Q^2 (Q \sin^2 \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) + P R \cos^2 \phi) + (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) Q^2 \sin^2 \phi - \\ - 2 Q^2 \sin^2 \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) = Q^2 P R \cos^2 \phi;$$

de coëfficiënt van  $\gamma^2$

$$R^2 \sin^2 \theta . Q (P \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta) \cos^2 \phi + Q (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) R^2 \cos^2 \theta . \cos^2 \phi + \\ + 2(P - R) R^2 \sin^2 \theta . \cos^2 \theta . \cos^2 \phi = P Q R^2 \cos^2 \phi;$$

de coëfficiënt van  $\alpha\beta$

$$\begin{aligned}
& -2PQ^2 \sin \theta . \cos \phi . \sin \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) + 2Q^2 P \sin \phi (R - P) \cos^2 \theta . \sin \theta . \cos \phi + \\
& \quad + 2PQ^2 \sin \phi . \cos^2 \theta (P - R) \sin \theta . \cos \phi + \\
& \quad + 2PQ \sin \theta . \cos \phi . \sin \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) = 0,
\end{aligned}$$

de coëfficiënt van  $\beta \gamma$

$$\begin{aligned}
& 2Q^2 R \cos \theta . \cos \phi . \sin \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) + 2RQ^2 \sin^2 \theta . \sin \phi (R - P) \cos \theta . \cos \phi + \\
& \quad + 2Q^2 R \sin \phi . \sin^2 \theta (P - R) \cos \theta . \cos \phi - \\
& \quad - 2Q^2 R \cos \theta . \cos \phi . \sin \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) = 0,
\end{aligned}$$

de coëfficiënt van  $\alpha \gamma$

$$\begin{aligned}
& 2PQR \sin \theta . \cos \theta (P \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta) \cos^2 \phi - \\
& \quad - 2PQR \cos \theta . \sin \theta . \cos \phi (P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta) + \\
& \quad + 2PR \cos^2 \phi (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (P - R) Q \sin \theta . \cos \theta = 0.
\end{aligned}$$

Dus komt voor

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \\
& = \frac{P^2 QR \cos^2 \phi . \alpha^2 + PQ^2 R \cos^2 \phi . \beta^2 + P Q^2 R \cos^2 \phi . \gamma^2}{2PQR \cos^2 \phi} = \\
& = \frac{1}{2} (P \alpha^2 + Q \beta^2 + R \gamma^2) = G,
\end{aligned}$$

met (166) en zooals onmiddellijk uit de beteekenis van  $G$  (zie n<sup>o</sup>. 2) volgt, waarmede het bovenstaande bewezen is.

37. Het voorgaande geeft aanleiding tot eene

*Opmerking over de betrekkelijke beweging aan het aardoppervlak van een lichaam, dat om zijn zwaartepunt vrij draaien kan, terwijl dit door de aarde in hare beweging wordt medegevoerd.*

Volgens n<sup>o</sup>. 36 wordt de storingsfunctie bij zulk een lichaam  $-L$ ; en is de oplossing van  $H, = h$ , d. i. de ongestoorde beweging geheel bekend; onder de integralen behoort  $p_3 =$  standvastig  $= \rho_0$  en met (153) en (155) vindt men gemakkelijk, dat

$$p_3 = P p' \gamma_1 + Q q' \gamma_2 + R r' \gamma_3 = \rho_0,$$

de bekende integraal der perken om de  $w$ -as is. Neemt men nu de  $w$ -as aan 't aardoppervlak evenwijdig aan de aardas, zoo kan men volgens de beteekenis van  $L$  (zie n<sup>o</sup>. 2) terstond neerschrijven

$$-L = -\gamma_w p_3 = -\gamma_w \rho_0.$$

Deze hoogst eenvoudige storingsfunctie bewijst, dat alleen het met

$\rho_0$  tot een canonisch stelsel samengevoegde element nl.  $-\rho_1$  eene functie van den tijd wordt; en wel, dat

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \gamma_w, \quad \rho_1 = [\rho_1]_{t=0} + \gamma_w t.$$

Daar de integraal  $\frac{\partial V}{\partial \rho_0} = -\rho_1$ , wegens de integraal  $\frac{\partial V}{\partial \rho} = p_3 =$   
 $= \rho_0$ , noodzakelijk den vorm

$-\rho_1 = \rho +$  functie der andere elementen en van den tijd aannemen moet; en daar eene verandering van  $\rho$  eene draaiing van het  $u, v, w$ -stelsel om de  $w$ -as aanduidt, is de beteekenis van deze vergelijking, dat de beweging ten opzichte van dit  $u, v, w$ -stelsel, met de snelheid  $-\gamma_w$  om de  $w$ -as draaiende gedacht, geheel als in een vast stelsel plaats heeft. Aan BOUR<sup>1)</sup>, die deze uitkomst op eene weinig van de onze verschillende wijze vond, was zeker ontgaan, dat zij vroeger reeds in meer sierlijken vorm door BAËHR was medegedeeld<sup>2)</sup>, nl. als volgt.

Alors d'après ce qui précède le mouvement du corps peut se définir de la manière suivante:

„Autour du centre de rotation placez l'ellipsoïde central dans sa position initiale et par ce centre menez une ligne parallèle à l'axe de la terre. Ayant pris deux longueurs dans le rapport de la vitesse angulaire de la terre à celle de la rotation initiale, portez les, à partir du centre de rotation, la première sur cette ligne, dans un sens tel qu'elle soit l'axe d'une rotation de même sens que celle de la terre, la seconde sur l'axe de la rotation relative initiale; ensuite achevez le parallélogramme dont ces deux lignes sont les côtés. Par le point de rencontre de la diagonale de ce parallélogramme et de la surface de l'ellipsoïde, menez un plan tangent à l'ellipsoïde, et du centre de la rotation abaissez une perpendiculaire sur ce plan. Supposez que le plan tangent soit invariablement fixé au plan, qui passe par cette perpendiculaire et la ligne, qui est parallèle à l'axe de la terre; alors l'ellipsoïde roulera sans glisser, sur le plan tangent, avec une vitesse angulaire autour du rayon vecteur du point de contact, proportionnelle même à la longueur de ce rayon, tandis qu'en même temps le second plan, qui entraîne le plan tangent, tourne autour de la ligne parallèle à l'axe de la terre, en sens contraire de la rotation diurne, et avec la vitesse angulaire même de cette rotation.

<sup>1)</sup> LIOUVILLE, 2<sup>e</sup> Sér., Vol. 8.

<sup>2)</sup> GRUNERT, Archiv, Band 24 (1855).

Le rapport de la longueur, qui représentera la vitesse angulaire de l'ellipsoïde, autour du rayon vecteur du point de contact à la longueur même de ce rayon est constant, et sa valeur est déterminée au commencement du mouvement par le rapport de la diagonale du parallélogramme au rayon vecteur avec laquelle elle coïncide."

Hoe eenvoudig nu de analytische afleiding van deze uitkomst in het voorgaande is geworden, uitgaande van de betrekkelijke beweging in het draaiend coördinatenstelsel, schijnt mij volgens de opmerkingen n<sup>o</sup>. 1 toch, dat beide geleerden een onnoodigen omweg gemaakt hebben, door deze als uitgangspunt voor de oplossing van dit vraagstuk te nemen. Immers, wanneer men begint met zich de volstreckte beweging als gevraagd voor te stellen, ziet men onmiddellijk, dat de voorwaardevergelijkingen voor de beweging van het stelsel wezentlijk vereenvoudigd worden, door, in plaats van een vast stelsel, een te nemen, waarvan bij evenwijdig verschuivende assen de oorsprong steeds in het ophangpunt blijft, omdat de voorwaardevergelijkingen van de plaats van dit punt wezentlijk afhangen; van de beweging dezer nieuwe coördinatenassen kan men (volgens n<sup>o</sup>. 2) steeds afzien, wanneer men de krachtfunctie  $K$  in rekening brengt, die echter voor een lichaam, welks zwaartepunt en ophangpunt samenvallen, tot 0 (zie (6)) wordt. Daardoor heeft men het vraagstuk der volstreckte beweging teruggebracht tot dat van een lichaam, hetwelk in een volstreckt vast coördinatenstelsel om een vast punt draait; en vindt men de betrekkelijke beweging door coördinatenherleiding, terwijl men daarbij onmiddellijk de meetkundige voorstelling van BAEHR aansluiten kan.

Daaraan heeft BAEHR eene andere opmerkelijke gevolgtrekking geknoopt, nl. „il suit encore du résultat trouvé, que si l'on n'imprime aucune vitesse à un corps dont le centre de gravité est le seul point qui reste fixe par rapport à la terre, ce corps ne resterait en repos relatif que lorsque l'un de ses axes principaux d'inertie coïncide avec la ligne parallèle à l'axe terrestre." Nog eenvoudiger volgt dit terstond uit n<sup>o</sup>. 2, waar voor de krachtfunctie voor zulk een lichaam slechts  $G$  overblijft, wanneer men in aanmerking neemt, dat de krachtfunctie voor een evenwichtsstand aan het kenmerk voor maxima en minima moet voldoen, en dat  $G$  volgens n<sup>o</sup>. 2 bij verschillende standen van het lichaam telkens evenredig is aan het kwadraat van het stuk, dat door de centralellipsoïde van het lichaam afgesneden wordt op de lijn, die door het ophangpunt er van evenwijdig aan de draaiingsas van het coördinatenstelsel getrokken wordt. Verder kan men terstond aan de stelling van BAEHR toevoegen, dat,

wanneer de as van 't kleinste of die van 't grootste traagheidsmoment aan de draaiingsas van het coördinatenstelsel (de aardas) evenwijdig is, dit evenwicht standvastig is; maar dat het wankelend is, wanneer de as van het middelste der traagheidsmomenten de richting van de aardas heeft; daar de rusttoestand in de betrekkelijke beweging overeenkomt met eene draaiing om de traagheidsas, die in de aardas valt, in de volstreckte beweging, en de assen van 't kleinste en grootste traagheidsmoment standvastige, die van 't gemiddelde traagheidsmoment eene wankelende draaiingsas is.

Terwijl dit vraagstuk bij de aannahme, dat de verandering in de aantrekkingskracht der zwaarte in richting en grootte binnen de grenzen van het lichaam verwaarloosd mag worden, de toepassing van de leer der betrekkelijke beweging in een draaiend coördinatenstelsel niet vordert, wordt dit wel het geval, zoodra men overeenkomstig met de werkelijkheid die verandering in aanmerking neemt.

38. De berekeningen in n°. 35 voeren eindelijk tot de belangrijkste toepassing van Hoofdst. II, nl. tot

§ 4. *Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde.*

Stelt men namelijk  $\rho = 0$ ,  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , zoodat de  $\eta$ -as alleen om ééne bepaalde lijn in het horizontale vlak door het ophangpunt draaien kan, en, wanneer de slinger in rust is, even als de  $\xi$ -as horizontaal ligt; zoo komt dit overeen met het geval van een slinger, die cardanisch aan twee messen opgehangen is, van welke er een vast met de aarde verbonden is; en blijven de uitkomsten van n°. 35, zooals wij in § 5 zullen zien, ook gelden voor oneindig kleine waarden van  $R$  ten opzichte van  $P$  en  $Q$ , welk geval wij in § 2, en dus ook in § 3, uitzonderden.

Met zulk een slinger heb ik de in Hoofdst. II beschreven verschijnselen proefondervindelijk nagegaan; de uitkomsten van dit onderzoek benevens eene meer elementaire afleiding der vergelijkingen (A) en (B) Hoofdst. II, worden in het proefondervindelijk gedeelte van mijne dissertatie beschreven. Was de aarde in rust, en het verschil der traagheidsmomenten om de  $\xi$  en de  $\eta$ -as zeer gering, zoo zou het snijpunt van de verbindingslijn van zwaarte- en ophangpunt, of der  $\zeta$ -as, met het  $x$ ,  $y$ -vlak, bij oneindig kleine slingeringen in dit vlak, de figuren van LISSAJOUS voor twee nagenoeg gelijke slingertijden beschrijven; en men kan door gepaste nieuwe massa's aan den slinger toe te voegen, het verschil der slingertijden

in de beide richtingen, dus de periode  $\Pi$  dezer figuren, wijzigen en bijv. tot twee uren maken.

Stellen wij ons nu voor, dat de slinger zoo in beweging gebracht is, dat dit snijpunt van de  $\zeta$ -as met het  $x, y$ -vlak aanvankelijk eene rechtlijnige slingering maakt, voor welke de volgens Hoofdst. II, § 1 genomen hoek  $X_0$  ten opzichte van de  $x$ -as binnen de in n°. 29 besproken grenzen  $X_0^D$  valt; zoodat de beweging van het waargenomen punt (de draaiing der aarde in aanmerking nemende) tot de klasse B. II behoort. De ongestoorde beweging zou dan twee onderperioden vertoonen van gelijken duur, begrensd door de rechtlijnige slingeringen, die in de diagonalen van den rechthoek  $f = X_0$  (zie n°. 30) vallen; de slingeringskrommen zouden dezen rechthoek voortdurend aanraken; en de tweede periode in het omgekeerd doorloopen van de eerste bestaan. De beweging, die men aan het aardoppervlak waarneemt, onderscheidt zich van deze ongestoorde in het bijzonder daardoor, dat de onderperioden verschillend van duur zijn, dat de ééne eene normale en de andere eene abnormale is, en dat geheel verschillende den rechthoek  $f = X_0$  niet meer rakende ellipsen zich in beide perioden vertoonen. Met een slinger van 1 meter lengte laat zich in twee uren de draaiing der aarde door deze proef duidelijk aantoonen. Ook kan men uit de waargenomen verschijnselen met behulp van de formules van het vorige Hoofdstuk de draaiingssnelheid der aarde berekenen. Ik zal hier echter slechts het beginsel aangeven, daar ik later de quantitative zijde van de proef, met nauwkeuriger inachtneming der proefondervindelijke omstandigheden, volgens de vergelijkingen (67) en (68) uitvoeriger behandelen zal. De methode, die het meest voor de hand ligt, is den duur van eene geheele periode  $\Pi$  te meten; waaruit met (126), als men nog  $\psi'$  kent,  $\sqrt{\gamma^2}$  volgt, die hier de waarde  $\frac{2P - R}{2P} \sqrt{\gamma w^2}$  heeft.

Ter bepaling van  $\psi'$  kan men dan in de eerste plaats gebruik maken van (139) en (140); bepaalt men de hoeken, wier tangenten met de maximummassenverhoudingen in de beide onderperioden overeenkomen, zoo is het verschil van beiden  $\psi'$ . Eene andere bepaling levert de volgende opmerking.

Voor aanvankelijk rechtlijnige slingeringen is de bolvormige driehoek van n. 20 bij  $t = 0$  rechthoekig; dus is volgens den regel van NEPER

$$\sin \psi' = \operatorname{Tg} 2 X_0 \cdot \operatorname{Cotg} 2 \delta \dots \dots \dots (170)$$

Daar de onderperioden in de verhouding van  $\pi - 2\delta$  en  $2\delta$  tot

elkaar staan ( $\delta$  in een der beide eerste quadranten nemende), kan men  $\psi'$  vinden door, behalve den duur van de geheele periode den tijd, waarna oorspronkelijk rechthoekige slingeringen voor de eerste maal weder rechthoekig worden, — dus den duur van de eerste onderperiode, — en  $2X_0$ , den hoek tusschen de oorspronkelijke slingering en hare symmetrische, aan 't einde der eerste onderperiode, — dus het gebied der eerste onderperiode — te meten, en (170) toe te passen.

Het teeken van  $\gamma''$  is tegengesteld aan dat van  $\frac{dX}{dt}$  in de normale periode; want dan is  $\frac{dX}{d(D_i + \delta)}$  positief (zie n°. 25). Uit  $\gamma'' = \frac{2P - R}{2P} \gamma_{10}$  volgt nu terstond  $\gamma_{10}$ , d. i. de ontbondene van de draaiingssnelheid der aarde volgens de naar beneden gerichte verticaal van het ophangpunt.

39. Naast dit bewijs voor de aswenteling der aarde uit de gestoorde figuren van LISSAJOUS kan men een ander stellen, dat er wel als bijzonder geval in bevat is, maar toch een geheel ander karakter vertoont, en eene merkwaardige tegenstelling met de proef van FOUCAULT vormt.

Wanneer men den slinger, nadat  $Tg^2 \psi < 1$  is gemaakt, aanvankelijk in de  $x$  of de  $y$ -as in slingering brengt, zou hij, wanneer de aarde zich in rust bevond, steeds in hetzelfde vlak blijven slingeren. Maar, daar de aarde draait, ontstaan uit de vlakke slingeringen elliptische, wier groote as, terwijl de kleine as toe- en afneemt, om de oorspronkelijke slingering heen en weer zweeft, en die ten slotte weder in de oorspronkelijke vlakke slingeringen overgaan (klasse F. II).

40. Een derde eigenaardig bewijs levert de klasse C, de mogelijkheid van ellipsen, die niet in rechte lijnen overgaan. Want wanneer men uit de andere bewegingsverschijnselen van den slinger weet, dat  $Tg \psi$  niet  $\infty$  is, zou men, afgezien van de draaiing der aarde, uit de theorie der figuren van LISSAJOUS afleiden, dat elke slingerings-ellips zich voortdurend veranderen, en daarbij steeds op bepaalde oogenblikken in eene rechte lijn overgaan moest. In de klasse E der onveranderlijke ellipsen komt dit bewijs op het fraaist uit.

41. Eindelijk kan men als vierde bewijs de wet aanvoeren, volgens welke de ellipsen, die als storingen in de proef van FOUCAULT optreden, ontstaan en zich veranderen (klasse B. I.)

42. Zooals in n°. 36 voor een slinger, die vrij om een punt draaien kan, zullen wij nu voor den cardanisch opgehangen slinger

van n<sup>o</sup>. 37 het deel van de storingsfunctie, dat van de voorwaardevergelijkingen afhangt, berekenen.

In dit geval is

$$L = (P \alpha \cos \theta + R \gamma \sin \theta) \frac{d\phi}{dt} + Q \beta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(1.1)} = \frac{1}{P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta}, \quad \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(2.2)} = \frac{1}{Q}, \quad (\text{zie n}^{\circ}. 33),$$

$$\begin{aligned} \text{en } \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} &= \frac{1}{D} \left[ \frac{\partial D}{\partial(1.1)} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 + \frac{\partial D}{\partial(2.2)} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{P^2 \alpha^2 \cos^2 \theta + R^2 \gamma^2 \sin^2 \theta + 2 P R \alpha \gamma \sin \theta \cdot \cos \theta}{P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta} + Q \beta^2. \end{aligned}$$

Verder

$$2 G - \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 2 \frac{P R (\alpha \sin \theta - \gamma \cos \theta)^2}{P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta},$$

onafhankelijk van de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel om het bewegelijke mes;

$$\begin{aligned} \text{en daar } \alpha &= \alpha_u \cos \theta + \beta_v \sin \phi \cdot \sin \theta - \gamma_w \cos \phi \cdot \sin \theta, \\ \gamma &= \alpha_u \sin \theta - \beta_v \sin \phi \cdot \cos \theta + \gamma_w \cos \phi \cdot \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\text{komt er } \frac{P R (\beta_v \sin \phi - \gamma_w \cos \phi)^2}{P \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta}$$

voor, zoodat het ook onafhankelijk blijkt te zijn van de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel om het vaste mes, en van het traagheidsmoment van den slinger om het bewegelijke.

Wanneer men de draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel om de as loodrecht op de beide messen op elk oogenblik  $\Omega$  noemt, en het traagheidsmoment van den slinger om dezelfde as  $P_{\Omega}$ , zoo is

$$P_{\Omega} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{R} + \frac{\sin^2 \theta}{P}}$$

$$\text{en } \Omega = \beta_v \sin \phi - \gamma_w \cos \phi,$$

$$\text{zoodat } 2 G - \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(r.s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 2 P_{\Omega} \Omega^2;$$

of de storingsfunctie van de tweede orde is alleen afhankelijk van de ontbondene der draaiingssnelheid van het coördinatenstelsel volgens die as, om welke de voorwaardevergelijkingen eene draaiing van het stof-

felijk stelsel in de betrekkelijke beweging onmogelijk maken.

*Mechanische beteekenis van het tweede gedeelte van de storingsfunctie voor de betrekkelijke beweging.*

(Vervolg van Hoofdstuk I, n<sup>o</sup>. 3 en n<sup>o</sup>. 9.)

Wij zullen nu een overzicht geven van de waarden der storingsfunctie van de tweede orde voor de betrekkelijke beweging in de door ons beschouwde gevallen.

In aansluiting aan n<sup>o</sup>. 9 moeten wij hier echter eerst duidelijker in 't licht stellen, dat dit gedeelte eene eigene mechanische beteekenis heeft, of m. a. w. dezelfde waarde behoudt, wanneer men de betrekkelijke beweging door andere onafhankelijke coördinaten,  $q'$  in plaats van  $q$ , uitdrukt. Voor  $G$  zagen wij dit reeds in n<sup>o</sup>. 2, en wij behoeven dus slechts aan te toonen, dat

$$\sum_{s'} \sum_{r'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_{r'}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_{s'}} \frac{1}{D'} \frac{\partial D'}{\partial (r'.s')} = \sum_s \sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)},$$

waar de  $(r'.s')$  en  $D'$  ten opzichte van de  $q'_{r'}$ ,  $q'_{s'}$ , ... evenzoo gevormd zijn, als de  $(r.s)$  en  $D$  ten opzichte van de  $q_r$  en  $q_s$ . Dit nu is slechts een bijzonder geval van de stelling, dat in (31)

$$\sum_s \sum_r \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} = \sum_{r'} \sum_{s'} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}'_{r'}} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}'_{s'}} \frac{1}{D'} \frac{\partial D'}{\partial (r'.s')};$$

of m. a. w., dat de grootheid, die aan de karakteristieke functie voor een aan willekeurige voorwaarden onderworpen stoffelijk stelsel moet worden toegevoegd, om die voor de beweging van het stelsel onder de werking van krachten met eene SCHERING'sche krachtfunctie te verkrijgen, eene eigene mechanische beteekenis heeft.

Om dit te bewijzen, merke men op, dat

$$p_r = \sum_{r'} p'_{r'} \frac{\partial \dot{q}'_{r'}}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{r'} p'_{r'} \frac{\partial q'_{r'}}{\partial q_r},$$

wanneer

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \quad \text{en} \quad p'_{r'} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}'_{r'}}$$

en  $T$  de levende kracht van het stelsel is. Men zal  $T$  volgens (27) uitdrukkende in de  $p'$  en  $q'$  dus vinden

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \sum_{r'} \sum_{s'} \frac{\partial \dot{q}'_{r'}}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial \dot{q}'_{s'}}{\partial \dot{q}_s} p'_{r'} p'_{s'} + \text{functie van } q' \text{ en } t;$$

terwijl men uitgaande van (18) en terstond de  $q'$ ,  $(r'.s')$ ,  $D'$  en  $p'$  invoerende, gevonden zou hebben

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r'} \sum_{s'} \frac{1}{D'} \frac{\partial D'}{\partial (r'.s')} p'_{r'} p'_{s'} + \text{functie van } q' \text{ en } t.$$

Daar nu voor alle waarden van de  $p'$  de vergelijking

$$T = T,$$

of

$$\frac{1}{2} \sum_{r'} \sum_{s'} p'_{r'} p'_{s'} \frac{1}{D'} \frac{\partial D'}{\partial (r'.s')} = \frac{1}{2} \sum_{r'} \sum_{s'} p'_{r'} p'_{s'} \sum_r \sum_s \frac{\partial q'_{r'}}{\partial q_r} \frac{\partial q'_{s'}}{\partial q_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} +$$

+ functie van  $q'$  en  $t$

gelden moet, blijkt

$$\frac{1}{D'} \frac{\partial D'}{\partial (r'.s')} = \sum_r \sum_s \frac{\partial q'_{r'}}{\partial q_r} \frac{\partial q'_{s'}}{\partial q_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)},$$

dus

$$\begin{aligned} \sum_{s'} \sum_{r'} \frac{1}{D'} \frac{\partial D'}{\partial (r'.s')} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}'_{r'}} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}'_{s'}} &= \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \sum_{r'} \sum_{s'} \frac{\partial q'_{r'}}{\partial q_r} \frac{\partial q'_{s'}}{\partial q_s} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}'_{r'}} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}'_{s'}} = \\ &= \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \end{aligned}$$

te zijn. In 't geval van de betrekkelijke beweging onder de werking van krachten, die de snelheden niet bevatten, is

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r};$$

en dan heeft dus

$$\frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r.s)}$$

eene eigene mechanische beteekenis.

Is de draaiing in de betrekkelijke beweging om elke as mogelijk, zoo vonden wij (vrije punten, en 't geval van n°. 36) dat de van de voorwaardevergelijkingen afhankelijke storingsfunctie nul was. In het geval van n°. 42 was die draaiing om eene as onmogelijk; de storingsfunctie van de tweede orde was toen de levende kracht van de draaiing van het bewegende coördinatenstelsel om die as, wanneer men op het beschouwde tijdstip de stoffelijke punten er plotseling onwrikbaar mede verbonden denkt. Het in Hoofdstuk II behandelde geval levert een voorbeeld van de onmogelijkheid der draaiing om twee loodrecht op elkaar staande assen; hier is voor een stelsel vrij in het vlak bewegende punten

$$G - \sum_r \sum_s \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial (r \cdot s)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \sum_i m_i (\beta^2 x_i^2 + \gamma^2 y_i^2);$$

de storingsfunctie, die van de voorwaardevergelijkingen afhangt, is dus de som der levende kracht van de draaiingen van het stelsel om de beide assen, om welke de voorwaardevergelijkingen eene draaiing in de betrekkelijke beweging onmogelijk maken.

Is eindelijk de draaiing om geene as in de betrekkelijke beweging mogelijk, zoo wordt het tweede deel der storingsfunctie eenvoudig  $G$ , de geheele levende kracht van de draaiing van het stoffelijke stelsel met het coördinatenstelsel.

Het zoude ons te ver van ons onderwerp verwijderen, de vereenvoudiging, die het bestaan van de wet der perken voor de vrije beweging van een stelsel om een of twee assen in de van de voorwaardevergelijkingen afhangelde storingsfunctie geeft, hier in 't algemeen na te gaan.

§ 5. *Eindige, maar toch kleine bewegingen van den cardanisch opgehangen slinger.*

43. Mogen bij den slinger van de vorige § de amplituden  $\sqrt{2\alpha_0}$  en  $\sqrt{2(k' - \alpha_0)}$  niet, hunne kwadraten  $2\alpha_0$  en  $2(k' - \alpha_0)$  echter wel als oneindig klein beschouwd worden, zoo moet volgens (154), en omdat  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  en  $\rho = \rho_1 = 0$  blijft, om

$$T = \frac{1}{2} \left[ (1.1) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + (2.2) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

te verkrijgen, aan  $T$  bij oneindig kleine amplituden

$$\frac{1}{2} (R - P) \theta^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2$$

worden toegevoegd; en verkrijgt men uit de karakteristieke functie van het stelsel voor oneindig kleine amplituden — daar in 't algemeen

$$D = (1.1)(2.2),$$

en dus 
$$H_1 = T = \frac{p_1^2}{2(1.1)} + \frac{p_2^2}{2(2.2)}$$

is, — die voor ons geval, door daarin  $\frac{p_1^2}{2P \left( 1 + \frac{R-P}{P} \theta^2 \right)}$  in plaats van

$\frac{p_1^2}{2P}$  te stellen; of, wat hetzelfde is, er  $-\frac{p_1^2}{2P} \frac{R-P}{P} \theta^2$  aan toe te voegen.

Verder wordt nu

$$U = M \cos \phi \cdot \cos \theta = M \left( 1 - \frac{\phi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\phi^4}{24} + \frac{\phi^2 \theta^2}{4} + \frac{\theta^4}{24} \right);$$

zoodat tengevolge van de eindige amplituden in de krachtfunctie nog

$$-\frac{M}{24} (\phi^4 + 6\phi^2\theta^2 + \theta^4)$$

bij de karakteristieke functie komt.

Sluit men de berekeningen voor dit geval aan bij die in n°. 35 en bij de ongestoorde beweging (162) door in (168), overeenkomstig  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ,  $p_s = \rho_0 = 0$  te stellen; en voert men de waarden van  $\phi$  en  $\theta$ , door (162) in de elementen uitgedrukt, in; zoo moet dus aan de storingsfunctie  $S'$  van (168), waarin volgens (163)  $S_2 = 0$  is, om de eindige amplituden in rekening te brengen, voor het geval dat  $P$  en  $Q$  oneindig weinig verschillen, toegevoegd worden

$$S_A = -\frac{2R}{MP} (h' - \alpha_0) \alpha_0 \cos^2 p't' \cdot \sin^2 q't'' + \frac{1}{6M} [12(h' - \alpha_0) \alpha_0 \cos^2 p't' \cdot \sin^2 q't'' - (h' - \alpha_0)^2 \sin^4 p't' - \alpha_0^2 \sin^4 q't'' - 6(h' - \alpha_0) \alpha_0 \sin^2 p't' \cdot \sin^2 q't''] .$$

Ontbindt men  $q't'' = p't' + T_0$ ,

en merkt men op, dat in plaats van de producten van  $\cos p't'$  en  $\sin p't'$ , daar volgens (94) de verandering der elementen gedurende eene slingering slechts oneindig klein is, hunne middelwaarden

$$\overline{\cos^4 p't'} = \frac{3}{8}, \quad \overline{\sin^2 p't' \cdot \cos^2 p't'} = \frac{1}{8}, \quad \overline{\sin^4 p't'} = \frac{3}{8},$$

$$\overline{\cos p't' \cdot \sin^2 q't''} = \frac{1}{8} (1 + 2 \sin^2 T_0), \quad \overline{\sin^2 p't' \cdot \sin^2 q't''} = \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 T_0),$$

$$\overline{\sin^4 q't''} = \frac{3}{8},$$

gesteld mogen worden; zoo komt men tot

$$S_A = -\frac{h'^2}{16M} - \frac{R}{4MP} (h' - \alpha_0) \alpha_0 + \frac{3P - 2R}{4MP} (h' - \alpha_0) \alpha_0 \sin^2 T_0. \quad (171)$$

De storingsfunctie voor dit vraagstuk is dus, wanneer men de aarde in rust denkt,  $S_5 = S_A$ ; en, wanneer men let op de draaiing der aarde,  $S_5 = S_3 + S_A$ ; waar  $S_3$  daardoor ontstaat, dat in  $S_2$  bepaald

door (163),  $\gamma_w$  in plaats van  $\frac{d\rho}{dt}$  geschreven wordt. Daar verder  $R$  nergens in den noemer voorkomt, blijkt ook de onderstelling van § 2 en 3, dat  $R$  niet oneindig klein ten opzichte van  $P$  en  $Q$  is, in dit geval onnoodig te zijn.

Even als in het vorige geval (n°. 35) en omdat hier  $h' = h$ , is weder,

$$\frac{dh'}{dt} = 0.$$

Voor  $\alpha_0$  en  $T_0$  vindt men uit  $S_5'$  de volgende differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} -\frac{dT_0}{dt} &= (p-q) + \frac{Rp}{4MP} (h' - 2\alpha_0) - \\ &- \frac{3P-2R}{4MP} p(h'-2\alpha_0) \sin^2 T_0 - \gamma_1' \sin T_0 \frac{h' - 2\alpha_0}{\sqrt{(h' - \alpha_0)\alpha_0}}, \\ \frac{d\alpha_0}{dt} &= \frac{3P-2R}{2MP} p(h' - \alpha_0)\alpha_0 \sin T_0 \cdot \cos T_0 - 2\gamma_1' \cos T_0 \sqrt{(h' - \alpha_0)\alpha_0}, \end{aligned}$$

wanneer nu

$$\gamma_1' = \frac{2P-R}{2P} \gamma_w \dots \dots \dots (172)$$

Met (100) komt

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt} &= -2\gamma_1' \cos T_0 \sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \left\{ 1 + \frac{\mu_1}{\gamma_1'} \sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \sin T_0 \right\}, \quad (173) \\ \frac{dT_0}{dt} &= q - p - \mu_2(1-2\alpha') + \gamma_1' \sin T_0 \frac{1-2\alpha'}{\sqrt{(1-\alpha')\alpha'}} \left\{ 1 + \frac{\mu}{\gamma_1'} \sqrt{(1-\alpha')\alpha'} \sin T_0 \right\}, \end{aligned}$$

waar

$$\mu_1 = \frac{3P-2R}{4P} \frac{h'}{\sqrt{MP}}, \quad \mu_2 = \frac{Rh'}{4P\sqrt{MP}} \dots \dots (174)$$

De integralen van deze differentiaalvergelijkingen kan men door elliptische functien uitdrukken. Daartoe voere men namelijk als nieuwe veranderlijke

$$s = \sin T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \dots \dots \dots (175)$$

in. Deze grootheid  $s$  staat tot het hoekoppervlak  $O$  van de oogeblikkelijke slingeringsellips in de standvastige verhouding

$$s : O = \frac{M}{2\pi h'} : 1; \dots \dots \dots (176)$$

want uit (99) volgt gemakkelijk  $\cos^2 2\chi = 1 - 4(1-\alpha')\alpha' \sin^2 T_0$ ,

$s = \sin \chi \cdot \cos \chi = \frac{ab}{a^2 + b^2}$ , waar  $a$  en  $b$  (als in n°. 17) de halve

grootte en kleine assen der slingeringsellips zijn; terwijl de wet van de levende kracht

$$M(\alpha^2 + b^2) = 2h'. \dots \dots \dots (177)$$

geeft. De vergelijkingen (171) worden dan, met

$$\mu_3 = q - p - \mu_2,$$

$$\frac{ds}{d\alpha'} = -\frac{\mu_3 + 2\mu_2\alpha'}{2(\gamma_1' + \mu_1 s)}, \quad \frac{ds}{dt} = \pm (\mu_3 + 2\mu_2\alpha') \sqrt{\alpha'(1-\alpha') - s^2}. \quad (178)$$

Uit de eerste volgt

$$l + 2\gamma_1' s + \mu_1 s^2 = -\mu_3 \alpha' - \mu_2 \alpha'^2,$$

waar  $l$  eene willekeurige standvastige is. Door de substitutie

$$s = f_1 y + f_2 \dots \dots \dots (179)$$

kan men aan  $\alpha'$  een der volgende vormen geven

$$\left. \begin{array}{l} \text{(L.)} \dots \dots \alpha' = M + (\pm) N \sqrt{1-y^2}, \\ \text{(M. I.)} \dots \alpha' = M + (\pm) N \sqrt{1+y^2}, \\ \text{(M. II.)} \dots \alpha' = M + (\pm) N \sqrt{y^2-1}, \end{array} \right\} \dots \dots (180)$$

waar  $M$ ,  $N$  en  $y$  reëel zijn; (L) geldt voor  $\mu_1$  positief, (M) voor  $\mu_1$  negatief; het teeken van  $\mu_1$  echter wordt bepaald door  $3P - 2R$ , en dus heeft men (L) of (M) al naarmate  $3P \gtrless 2R$ .

De verdere substitutien

$$\left. \begin{array}{l} \text{(L.)} \dots \dots y = \text{Sin } \phi_1, \\ \text{(M. I.)} \dots y = \text{Tg } \phi_1, \\ \text{(M. II.)} \dots y = \text{Sec } \phi_1, \end{array} \right\} \dots \dots (181)$$

voeren tot

$$\pm \frac{d\phi_1}{dt} = V_0 \sqrt{V_1 \text{Cos } \phi_1 + V_2 \text{Cos } \phi_1 + V_3 \text{Sin } \phi_1 + V_4 \text{Sin } \phi_1 \cdot \text{Cos } \phi_1 + V_5},$$

en eindelijk de substitutie

$$\text{Tg } \frac{1}{2} \phi_1 = x \dots \dots \dots (182)$$

$$\text{tot } \int \pm dt = \int \frac{dx}{\sqrt{W_4 x^4 + W_3 x^3 + W_2 x^2 + W_1 x + W_0}}. \quad (183)$$

eene elliptische integraal.

Het teeken  $\pm$  in (183) moet voor elk tijdstip in overeenstemming met dat  $\text{Cos } T_0$  gekozen worden.

Met het oog op de bepaling van  $\tau$  merken wij op, dat de substitutien

$$x = \frac{p_3 + q_3 f_3}{1 + f_3},$$

en  $f_3 = m_1 z$ , of  $f_3 = \frac{m_1}{z}$ , of  $f_3 = \frac{m}{\sqrt{1-z^2}}$ , of  $f_3 = \frac{m_1 \sqrt{1-z^2}}{z}$ ,

of eindelijk  $f_3 = \frac{m_1}{\sqrt{1-k^2 z^2}}$ ,

waar  $p_3, q_3, m_1, k$  standvastigen zijn, en vervolgens van

$$z = \text{Sing},$$

voeren tot de vier vormen

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{n_1 + n_2 \text{Sin } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}{1 + n_1 \text{Sin } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}, \\ x &= \frac{n_1 + n_2 \text{Cos } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}{1 + n_1 \text{Sin } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}, \\ x &= \frac{n_1 \text{Sin } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt) + n_2 \text{Cos } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}{\text{Sin } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt) + n_1 \text{Cos } am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}, \\ x &= \frac{n_1 + n_2 \Delta am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}{1 + n_1 \Delta am(\mathcal{F} \pm n_3 dt)}, \end{aligned} \right\} \dots (184)$$

waar  $n_1, n_2, n_3, n_4$  voor elk geval te bepalen standvastigen zijn.

Wij zullen dit onderzoek hier niet verder voortzetten; maar wijzen er op, dat de oplossing van het vraagstuk van kleine slingeringen, die men echter niet als oneindig klein beschouwen mag, van een willekeurig aan een horizontaal messenpaar op het aardoppervlak opgehangen lichaam, welks zwaartepunt op eene traagheidsas van het ophangpunt of, wat hetzelfde is, van het snijpunt der messen ligt, dezelve vormen omvat, of men de draaiing der aarde al dan niet in aanmerking neemt; en dat in beide gevallen slechts de standvastigen en de bijzondere vorm verschillen.

Om nog  $\tau$  voor het geval, dat  $P-Q$  als oneindig klein beschouwd mag worden, uit te drukken, heeft men volgens (171), (100) en (106)

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{h'}{8M} + \frac{Rh'}{4MP} \alpha' - \frac{\alpha'}{\sqrt{(1-\alpha')\alpha'}} \frac{\gamma_1'}{p} \text{Sin } T_\sigma \left(1 + \frac{\mu_1'}{\gamma_1'} s\right). \quad (185)$$

Men vindt  $\tau$  dus door eene kwadratuur, waarbij onder het integraalteeken eene rationeele stelkundige functie van  $\text{Cos } am$ ,  $\text{Sin } am$  en  $\Delta am$  van het argument  $\mathcal{F} \pm n_3 dt$  komt. Voert men dus als integratie-veranderlijke  $am \mathcal{F} \pm n_3 dt$  in, zoo laat zich deze quadratuur tot elliptische integralen terugbrengen, en kan men ten slotte

aan de geheele oplossing door de thetafunctien, behalve in eenige bijzondere gevallen, een uiterst convergenten vorm geven.

44. Nu moet nog het geval behandeld worden, dat  $P$  en  $Q$  willekeurige waarden hebben; de oplossing van het vraagstuk is dan, evenals in n°. 33, waar voor het geval van oneindig kleine amplituden de figuren van LISSAJOUS overeenkomstig met de verschillende verhoudingen der slingertijden gevonden werden, eenvoudiger dan wanneer  $P - Q$  als oneindig klein moet worden beschouwd. Ook wanneer de amplituden eindig zijn, kan men namelijk  $S_5$  blijven verwaarloozen; zoodat de draaiing der messen met de aarde geene verandering in de beweging van den slinger ten opzichte van deze brengt. De wijziging der figuren van LISSAJOUS door de eindige amplituden wordt door de storingsfunctie  $S_A$  alleen bepaald; of door

$$\frac{2\alpha_0(h' - \alpha_0)}{M} \left(1 - \frac{R}{P}\right) \cos^2 pt' \cdot \sin^2 qt'' - \frac{h'}{6M} ((h' - \alpha_0)^2 \sin^4 pt' + \\ + \alpha_0 \sin^4 qt'' + 6\alpha_0(h - \alpha_0) \sin^2 pt' \cdot \sin^2 qt'').$$

De middelwaarden van  $\sin^4 qt''$  en  $\sin^4 pt'$  blijven dezelfde als die wij te voren vonden; maar daar de teller en noemer van de meetbare breuk  $\frac{\mu'}{\nu'}$ , waarmede  $\left(q - \frac{\nu'}{\mu'}\right)pt''$  tot eene dergelijke langzaam veranderende grootheid als  $T_0$  wordt, nu verschillende geheele getallen zijn, wordt

$$\overline{\cos^2 pt' \cdot \sin^2 qt''} = \frac{1}{4} (1 + \overline{\cos 2pt'} - \overline{\cos 2qt''} + \overline{\cos 2pt' \cdot \cos 2qt''}) = \frac{1}{4};$$

$$\text{en dus} \quad S_A = -\frac{h'_2}{16M} + \frac{3P - 4R}{8PM} \alpha_0 (h' - \alpha_0),$$

$$h' = \text{standvastig}, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = 0, \quad \alpha' = \text{standvastig},$$

$$\frac{d\beta_0}{dt} = -\mu_4 (1 - 2\alpha'),$$

wanneer

$$\mu_4 = \frac{3P - 4R}{8PM} h',$$

$$\beta_1 = \beta_0 - \mu_4 (1 - 2\alpha') t,$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{h'}{8M} - \mu_4 \alpha_0, \quad \tau = \tau_0 + \left(\frac{h'}{8M} - \mu_4 \alpha_0\right) t. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (186)$$

Bij eindige amplituden worden dus geheel dezelfde figuren van LISSAJOUS als bij oneindig kleine slingeringen doorloopen; maar de verschillende vormen volgen met eene andere snelheid elkaar op.

45. Wat den hier beschouwden slinger betreft, willen wij nog opmerken, dat zijne beweging afgezien van de draaiing der aarde algemeen bepaald kan worden in het geval, dat alle drie hoofdtraagheidsmomenten van het ophangpunt gelijk zijn; zooals dit voor den vrij om een punt bewegelijken slinger (zie n°. 33) geschieden kan, wanneer deze een omwentelingslichaam om de as, waarop het zwaartepunt ligt, is, en dus twee hoofdtraagheidsmomenten van het ophangpunt gelijk zijn. Immers de gedeeltelijke differentiaalvergelijking wordt dan

$$\frac{1}{P} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = 2h + 2D \cos \phi \cdot \cos \theta = \\ = 2h + D \cos(\phi + \theta) + D \cos(\phi - \theta),$$

$$\text{of} \quad \frac{2}{P} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right\} = 2h + D \cos u + D \cos v,$$

$$\text{stellende} \quad u = \phi + \theta, \quad v = \phi - \theta,$$

$$\text{en dus} \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \sqrt{P(x + \frac{1}{2} D \cos v)},$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \sqrt{P(h - \alpha + \frac{1}{2} D \cos u)},$$

$$dW = \int \sqrt{P(x + \frac{1}{2} D \cos v)} dv + \int \sqrt{P(h - \alpha + \frac{1}{2} D \cos u)} du;$$

en de integralen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int \frac{\sqrt{P} dv}{2 \sqrt{x + \frac{1}{2} D \cos v}} - \int \frac{\sqrt{P} du}{2 \sqrt{h - \alpha + \frac{1}{2} D \cos u}} = -\beta_0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial h} = \int \frac{\sqrt{P} du}{2 \sqrt{h - \alpha + \frac{1}{2} D \cos u}} = -\tau,$$

die dus in den vorm van elliptische functiën zijn gebracht, nl.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\phi + \theta) &= \text{ArcSin} \frac{1}{\lambda} \text{Sin Am} \sqrt{\frac{D}{P}(t - \tau)}, \text{Mod} \frac{1}{\lambda}, \lambda = \sqrt{\frac{2D}{2(h - \alpha) + D}} \\ \frac{1}{2}(\phi - \theta) &= \text{ArcSin} \frac{1}{\lambda'}, \text{Sin Am} \sqrt{\frac{D}{P}(t - \tau - \beta_0)}, \text{Mod} \frac{1}{\lambda'}, \lambda' = \sqrt{\frac{2D}{2\alpha + D}} \end{aligned} \right\} (187)$$

§ 6. *Eindige, maar toch kleine bewegingen van den vrij om een punt bewegelijken slinger.*

46. Gaan wij nu over tot de overeenkomstige uitbreiding van het vraagstuk in § 3, waarvan dat in § 2 een bijzonder geval is, — dus

tot de beweging van een lichaam, welks zwaartepunt op eene traagheidsas van het ophangpunt ligt, maar dat overigens geheel willekeurig is, en om het laatste vrij draaien kan, — voor zulke amplituden, dat wel niet  $\sqrt{h' - \alpha_0}$  en  $\sqrt{\alpha_0}$ , maar toch  $h'$  en  $\alpha_0$  als oneindig klein mogen worden beschouwd; en laten wij weder de draaiing der aarde in acht nemen.

Dan verkrijgt men uit (158)

$$\left. \begin{aligned} H_s &= \frac{p_1^2}{2P} + \frac{p_2^2}{2Q} + \frac{p_3^2}{2R} + \left\{ \left(1 - \frac{R}{P}\right) \theta p_1 - \phi p_2 \right\} \frac{p_3}{R} + S'_6, \\ S'_6 &= \frac{P-R}{2PR} p_1^2 \theta^2 + \frac{\phi^2 p_2^2}{2R} + \frac{p_1 p_2 \phi \theta}{PR} (R-P); \end{aligned} \right\} (188)$$

wanneer wij weer als in §§ 2 en 3 het geval, dat een der traagheidsmomenten zeer klein ten opzichte van de anderen is, uitzonderen, oneindig kleine grootheden van de derde en hoogere orde verwaarloozen, en blijven onderstellen, dat  $p_3$ , of zooals men met n°. 33 dan gemakkelijk aantoonen kan,  $\frac{d\rho}{dt}$  oneindig is. Bij de storingsfunctie  $S'$  van n°. 35 komt derhalve (zie § 5),  $S'_6 + S''$ , als

$$\begin{aligned} S'_6 &= \frac{1}{2R} (p_1 \theta - \phi p_2)^2 - \frac{1}{2P} p_1^2 \theta^2 + \frac{p_1 p_2 \phi \theta}{P}, \\ S'' &= -\frac{M}{2A} (\phi^2 + 6\phi^2 \theta^2 + \theta^4), \end{aligned}$$

is. Drukt men nu  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  in de elementen volgens (162) uit, zoo verkrijgt men

$$S'_6 = \frac{2P}{MR} \alpha_0 (h' - \alpha_0) \text{Sin}^2 T_0 +$$

$$\frac{2\alpha_0(h' - \alpha_0)}{M} (2 \text{Cos} p t' \cdot \text{Cos} q t'' \cdot \text{Sin} p t' \cdot \text{Sin} q t'' - \text{Sin}^2 q t'' \cdot \text{Cos}^2 p t'');$$

wanneer weder  $P - Q$  zeer klein aangenomen wordt. Ontwikkelt men naar  $p t'$  en  $T_0$  en merkt men weer op, dat de termen, die  $\text{Cos}^3 p t' \cdot \text{Sin} p t'$  en  $\text{Sin}^3 p t' \cdot \text{Cos} p t'$  bevatten, als in § 5 wegvallen bij het vormen van  $\int dt$ ; dan blijft van  $2 \text{Cos} p t' \cdot \text{Cos} q t'' \cdot \text{Sin} p t' \cdot \text{Sin} q t''$  slechts  $2(\text{Cos}^2 T_0 - \text{Sin}^2 T_0) \text{Cos}^2 p t' \cdot \text{Sin}^2 p t' - \text{Sin}^2 p t' \cdot \text{Cos}^2 p t' \cdot \text{Cos}^2 T_0 - \text{Cos}^2 p t' \cdot \text{Sin}^2 T_0$  over; of met de middelwaarden, die in § 5 werden gebruikt

$$\frac{1}{8} - \frac{6}{8} \text{Sin}^2 T_0;$$

dus wordt

$$\{S'_6 = (\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \text{Sin}^2 T_0) \frac{\alpha_0(h' - \alpha_0)}{M} + \frac{2P}{MR} \text{Sin}^2 T_0 (h' - \alpha_0) \alpha_0;$$

Voor  $S''$  vonden wij bij de behandeling van 't vorige vraagstuk (§ 5)

$$S'' = -\frac{h'^2}{16M} - \frac{1}{4M} \alpha_0 (h' - \alpha_0) + \frac{1}{4M} \alpha_0 (h' - \alpha_0) \text{Sin}^2 T_0.$$

Dus is de storingsfunctie  $S_6$

$$S_6 = S' + S'_6 + S'' = -\frac{h'^2}{16M} + \frac{8P - 5R}{4MR} \text{Sin}^2 T_0 (h' - \alpha_0) \alpha_0 + \\ + \frac{2\gamma''}{p} \text{Sin} T_0 \sqrt{(h' - \alpha_0) \alpha_0},$$

waar

$$\gamma'' = \frac{2P - R}{2P} \left( \frac{\rho_0}{R} + \gamma_w \right),$$

en  $\gamma_w = 0$  is, wanneer men de aarde in rust denkt.

$$\text{Nu wordt } \frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{\partial S_6}{\partial \rho_0} = -\frac{2P - R}{2PR} \cdot \frac{2}{p} \text{Sin} T_0 \sqrt{(h' - \alpha_0) \alpha_0};$$

$\rho_0$  komt wel is waar ook in  $h'$  voor, maar de differentiatie voert overal tot grootheden, die oneindig klein van de tweede orde zijn, en dus tegenover dezen term van de eerste orde verwaarloosd mogen worden. Daarentegen blijkt uit de differentiatie  $\frac{\partial S_6}{\partial \rho_1}$ , dat  $\rho_0$  standvastig is. De grootheden  $\alpha_0$  en  $T_0$ , die de ligging en den vorm van de baan bepalen, hebben dus even als  $\tau$ , dat de plaats van het zwaartepunt in zijne baan aangeeft, betrekking op een coördinatenstelsel, dat met de snelheid

$$\frac{2P - R}{2PR} \cdot \frac{2}{p} \text{Sin} T_0 \sqrt{(h' - \alpha_0) \alpha_0} + \frac{\rho_0}{R}$$

om de  $+w$ -as draait, daarbij eene links omgaande draaiingssnelheid positief stellende.

Voor deze snelheid kan men bij invoering van  $s$  (173) ook schrijven

$$\frac{2P - R}{PR} \sqrt{\frac{P}{M}} h' s + \frac{\rho_0}{R} \dots \dots \dots (189)$$

$\alpha_0$  en  $T_0$  ten opzichte van het zoo bewegende coördinatenstelsel, of  $\alpha'$  volgens (100) invoerende;  $\alpha'$  en  $T_0$ , worden bepaald door de vergelijkingen (171), wanneer men daarin voor  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  in de plaats stelt (zie (169)) en voor  $\mu_2 = 0$ ,

$$\mu_1 = \mu'_1 = \frac{8P - 5R}{4R} h' \sqrt{\frac{P}{M}},$$

neemt.

De integralen worden geleverd door (176) nl.

$$\left. \begin{aligned} l + 2\gamma''s + \mu'_1 s^2 &= (p-q)\alpha', \\ \frac{ds}{dt} &= \pm (q-p) \sqrt{A + Bs + Cs^2 + Ds^3 + Es^4}, \end{aligned} \right\} (190)$$

waar

$$\begin{aligned} A &= \frac{l}{p-q} \left(1 - \frac{l}{p-q}\right); & B &= \frac{2\gamma''}{p-q} \left(1 - \frac{2l}{p-q}\right), \\ C &= \frac{\mu'_1}{p-q} - \frac{4\gamma''^2 + 2l\mu'_1}{(p-q)^2} - 1, & D &= -\frac{4\gamma''}{(p-q)^2}, & E &= \frac{-\gamma''\mu'_1}{(p-q)^2}. \end{aligned}$$

Als in § 5 komen voor  $s$  nu de vier vormen, die uit (182) ontstaan, wanneer men voor  $x, s$  schrijft; met deze hangt  $\alpha'$  echter door eenvoudiger betrekkingen samen. Dan vindt men  $\rho_1$  volgens (183) door eene quadratuur; evenzoo  $\tau$ , welke nu in plaats van door (170), door

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{h'}{8M} - \frac{\alpha'}{\sqrt{(1-\alpha')\alpha'}} \frac{\gamma''}{p} \text{Sin } T_0 \left(1 + \frac{\mu'_1 s}{\gamma''}\right) \dots (191)$$

bepaald wordt. In deze beide quadraturen komt weer eene rationeele stekkundige functie van  $\text{Cos } am$ ,  $\text{Sin } am$  en  $\Delta am$  van het argument  $\int \pm n_3 dt$ , waar  $n_3$  nu eene andere waarde  $n'_3$  heeft; en dus kan ten slotte de geheele oplossing van het vraagstuk weer tot theta-functiën worden teruggebracht. Deze oplossing omvat weder dezelfde vormen, of men de draaiing der aarde al dan niet in aanmerking neemt.

Heeft het verschil van  $P$  en  $Q$  eene eindige waarde, zoo vereenvoudigt zich dit vraagstuk weder even als dat van § 5.  $S'$  valt weg;

$$S'' \text{ wordt } -\frac{h'^2}{16M} - \frac{1}{8} \frac{(h' - \alpha_0)\alpha_0}{M};$$

$$S' \text{ evenzoo } \frac{P + Q - R}{2R} (h' - \alpha_0)\alpha_0;$$

dus de storingsfunctie

$$-\frac{h'^2}{16M} + \frac{P + Q - 3R}{2RM} h'^2 (1 - \alpha')\alpha' = -\frac{h'^2}{16M} + \mu'_2 h' (1 - \alpha')\alpha'.$$

De integralen (162) blijven voor dit vraagstuk gelden met

$$\rho_1 = \text{standvastig}, \quad \rho_0 = \text{standvastig}, \quad \alpha_0 = \text{standvastig}.$$

$$T_0 = \int \mu'_2 (1 - 2\alpha') dt, \quad \tau = \int \left( \frac{h'}{8M} - \mu'_2 \alpha_0 \right) dt.$$

Wij hebben dus weer dezelfde draaiende figuren van LISSAJOUS

als bij oneindig kleine amplituden, maar zij worden met eene andere snelheid doorloopen.

Werpen wij nu een blik terug op het behandelde vraagstuk, zoo zien wij, dat de beweging van dezen slinger juist zoo plaats vindt, alsof  $\alpha_n = 0$  en  $\beta_v = 0$  waren. Dit volgt reeds terstond uit (168), of met

$$L_{13} - \frac{\partial L_{01}}{\partial \rho} = 0, \quad L_{23} - \frac{\partial L_{02}}{\partial \rho} = 0,$$

uit 
$$S'' = L_{11} \dot{\phi} \frac{d\phi}{dt} + L_{22} \dot{\theta} \frac{d\theta}{dt};$$

immers zoolang men de draaiingssnelheid der aarde eenerzijds, het vierkant der amplituden anderzijds, als oneindig klein mag beschouwen, heeft  $S''$ , waar alleen  $\beta_v$  en  $\alpha_n$  voorkomen, geene beteekenis voor ons vraagstuk. De beweging grijpt dus plaats alsof de slinger zich aan de pool bevond, en dat de zwaartekracht daar dezelfde grootte had als op de plaats van waarneming, terwijl de omwentelingssnelheid der aarde  $\gamma_w$  was. Daardoor springt in het oog, dat die draaiing alleen eene meetkundige, geene mechanische beteekenis binnen de door ons gestelde grenzen voor dit vraagstuk heeft <sup>1)</sup>.

Voor de oplossing er van is echter deze opmerking niet als bij 't vraagstuk van n°. 37 van wezentlijk nut; daar de volstreckte beweging juist het eenvoudigst uitgedrukt kan worden als eene betrekkelijke beweging ten opzichte van een om de  $\omega$ -as met de (in 't algemeen veranderlijke) snelheid  $\frac{d\rho}{dt}$  draaiend, coördinatenstelsel.

### § 7. Behandeling der vorige vraagstukken voor $P = Q$ .

47. Dit bijzonder geval veroorlooft eene vergelijking met door anderen reeds verkregen uitkomsten.

Bij het vraagstuk, in § 5 behandeld, geeft deze onderstelling geene bijzondere vereenvoudiging, tenzij men gelijktijdig  $R = 0$  stelt, waardoor de slinger tot eene slingerende lijn, of tot een enkelvoudigen slinger wordt. Dan geeft (178), wegens  $-\mu_2 = \mu_3 = 0$ ,

$$s = \text{standvastig.}$$

Uit (173) volgt dan, dat ten opzichte van het  $xy$ -stelsel de verschijnselen dezelfde zijn als bij oneindig kleine amplituden, wanneer men in plaats van  $\gamma'$ ,  $\gamma'' + \mu_1 s$  neemt. Nu heeft  $\gamma'$  eene draaiing

---

<sup>1)</sup> Vergelijk voor het geval van den mathematischen slinger, BAEHR, *Notice sur le mouvement du pendule*, Middelbourg, 1853.

van de ellips met de gelijkmatige snelheid  $-\gamma'$  ten gevolge, terwijl de assen van de ellips onveranderd blijven. De invloed der eindige amplituden is dus geene andere dan dat zich bij die draaiing met de snelheid  $-\gamma''$ , eene voegt met de snelheid  $-\mu_1 s$ . Deze draaiing grijpt, — omdat de beweging in de ellips, van de zijde van de  $+w$ -as gezien, volgens (102) rechts- of linksomgaande is, alnaar mate  $s$  positief of negatief is; en omdat de draaiingen linksomgaande om de  $+w$ -as positief genomen moeten worden — in denzelfden zin plaats, als de beweging in de baan. Zij is uitgedrukt in deelen van den straal; en men kan er volgens (175) en (176) ook voor schrijven

$$\frac{3}{8\pi} \sqrt{\frac{M}{P}} O;$$

en, nog  $t$ , den halven slingtijd van den slinger,  $l$  de slingerlengte en tevens den afstand van het ophangpunt, waarop men de halve assen  $a'$  en  $b'$  van de slingeringsellips meet, noemende,

$$\mu_1 s = \frac{3\pi}{8t} \frac{a' b'}{l^2};$$

of in boogmaat en per uur

$$\frac{135.1800}{4t} \frac{a' b'}{l^2} \dots \dots \dots (192)$$

Deze uitdrukking stemt volkomen overeen met die, welke BRAVAIS <sup>1)</sup> en GALBRAIGHT en HAUGHTON <sup>2)</sup> gegeven hebben. AIRY <sup>3)</sup> vond deze formule alleen voor de bijzondere gevallen van nagenoeg cirkelvormige en nagenoeg rechtlijnige bewegingen van een enkelvoudigen slinger, en stelt hare geldigheid voor eene willekeurige verhouding van de groote en kleine as alleen waarschijnlijk (l. c.).

Nemen wij nu in het vraagstuk van § 6,  $P = Q$  of  $p = q$ .

Wij komen zoo tot het door HANSEN <sup>4)</sup> behandelde geval. Dan is

$$\mu_2 = 0; \quad s = \text{standvastig};$$

verder 
$$\mu_1 s = \left( -\frac{5}{4\pi} + \frac{P}{R\pi} \right) \sqrt{\frac{M}{P}} O;$$

en draait de ellips dus bij onveranderden vorm met de snelheid

$$-\gamma'' - 2 \left( \frac{P}{R} - \frac{5}{8} \right) \frac{h' s}{\sqrt{MP}}$$

<sup>1)</sup> LIOUVILLE, T. 19, p. 48.

<sup>2)</sup> *Phil. Magaz.*, (4) II. 134.

<sup>3)</sup> *Memoirs of Astr. Soc.*, 1851.

<sup>4)</sup> *Neueste Schriften der naturf. Ges. zu Danzig*, Bd. 5 (1853).

ten opzichte van het stelsel der  $x, y$ , dat zelve met de snelheid

$$\frac{2P - R}{R\sqrt{MP}} h' s + \frac{f_0}{R}$$

om de  $+w$ -as draait. Dit geeft voor de draaiingssnelheid van de groote as der ellips, ten opzichte van een vast met de aarde verbonden stelsel der  $xy$ ,

$$\frac{1}{4} \frac{h' s}{\sqrt{MP}} - \gamma_w \frac{2P - R}{2P} + \frac{f_0}{2P}$$

Merkt men nog op, dat

$$\frac{f_0}{2P} = \frac{R}{2P} \frac{d\rho}{dt} - \frac{h' s}{\sqrt{MP}},$$

zoo komt ten slotte voor die draaiingssnelheid

$$-\gamma_w \frac{2P - R}{2P} + \frac{R}{2P} \frac{d\rho}{dt} - [\pm]^r \frac{3\pi}{8t} \frac{a' b'}{l^2} \dots (193)$$

Wij zullen in n°. 49 zien, dat deze uitkomst overeenstemt met die van HANSEN, tot op den coëfficiënt  $\frac{3}{8}$  na, waarvoor hij foutievelijk  $\frac{1}{2}$  vindt.

48. In dit geval is ook de uit § 6 overgenomen onderstelling, dat  $R$  niet zeer klein ten opzichte van  $P$  en  $Q$  is, overbodig.

Dan immers ligt het voor de hand, de termen, die  $R$  in den noemer bevatten, met elkaar te vereenigen. Uit (158) volgt, dat zij, voor zoover zij in  $H$ , voorkomen, samen gevat kunnen worden tot

$$S_R = \frac{1}{2R} \left\{ \text{Sin } \theta \cdot p_1 - \text{Cos } \theta \cdot \text{Tg } \phi \cdot p_2 + p_3 \frac{\text{Cos } \theta}{\text{Cos } \phi} \right\}^2$$

Nu vindt men echter volgens (23), (155) en (153) gemakkelijk, dat

$$\text{Sin } \theta \cdot p_1 - \text{Cos } \theta \cdot \text{Tg } \phi \cdot p_2 + p_3 \frac{\text{Cos } \theta}{\text{Cos } \phi} = R r'$$

is; en verder blijkt door differentiatie, dat, ook voor den aan de zwaartekracht onderworpen slinger, waarvoor  $H = H, - U$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} \frac{\partial r'}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial r'}{\partial \phi} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{\partial r'}{\partial p_3} - \frac{\partial H}{\partial p_3} \frac{\partial r'}{\partial \rho} = 0$$

wordt, hetgeen de bekende voorwaarde

$$\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial r'}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial r'}{\partial p_i} = 0$$

daarvoor is, dat  $r' =$  standvastig eene integraal is, behoorende bij de karakteristieke functie  $H$ . Zoo vinden wij de bekende integraal, dat de draaiingssnelheid om de omwentelingsas van den LAGRANGE'schen slinger standvastig is, terug.

De storingen in de elementen  $\alpha_0, h', T_0$ , ten gevolge van de eindige amplituden verkrijgt men, voor zoover zij  $R$  tot noemer hebben, door differentiatie van  $S_R$ ; maar hierin is steeds  $r'$  als factor bevat; daar wij nu aangenomen hebben, dat  $r'$  oorspronkelijk oneindig klein was, blijft volgens de genoemde integraal  $r'$  dit steeds; en blijven voor amplituden, wier vierkant oneindig klein is, de ontwikkelingen van § 6, in 't bijzonder de omvormingen van  $S''$ , (voor een oogenblik afziende van de draaiing der aarde) ook voor zeer kleine waarden van  $R$  gelden; terwijl de storingen ten gevolge van de draaiing der aarde (volgens de opmerking aan 't slot van n<sup>o</sup>. 46) en die ten gevolge der eindige amplituden, daar beide oneindig klein zijn, eenvoudig als in § 6 samengesteld behoeven te worden om den invloed van het gelijktijdig optreden van beide te kennen.

### § 8. Over eene fout van HANSEN.

49. Om in te zien, waar HANSEN de fout gemaakt heeft, die hem voor den coëfficiënt  $\frac{1}{2}$  in plaats van  $\frac{3}{8}$  deed vinden, en eenige § § van zijne verhandeling, waarin dezelfde fout haren invloed op andere uitkomsten laat gelden, daarvan te bevrijden, willen wij de ontwikkelingen volgens zijne methode volgen.

Daarbij zullen wij gemakshalve zijne schrijfwijze gebruiken, die in deze § dus onafhankelijk is van de overigens door ons gevolgde, behalve wanneer daarop verwezen wordt.

Wanneer men bij een slinger, die een omwentelingslichaam is, waarvan het zwaartepunt en ophangpunt op de omwentelingsas liggen,  $\theta$  de afwijking van deze as van de verticaal noemt; en door  $\psi$  van het zuiden naar het westen geteld den hoek, dien het verticaal vlak van de as van den slinger met den meridiaan maakt, aanduidt; (HANSEN, *Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig*, V. 1853, S. 19) zoo zijn (l. c. § 4 Art. 21) de intermediaire integralen voor de beweging van den slinger aan het aardoppervlak

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -\text{Sin}^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2(g' - \mu \mu')(1 - \text{Cos} \theta) + \kappa, \\ \text{Sin}^2 \theta \frac{d\psi}{dt} &= \mu \text{Sin}^2 \theta + \mu'(1 - \text{Cos} \theta) + \kappa'. \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

$g'$  is eene standvastige, die afhangt van de massaverdeeling in den slinger (§ 3, Art. 13);  $\mu$  is het product van de draaiingssnelheid der aarde en de sinus van de poolhoogte (§ 3, Art. 13 en § 1, Art. 4);  $\mu'$  eene standvastige, die afhangt van de oorspronkelijk aan den slinger

gegeven draaiingssnelheid om zijne as (p. 24);  $\kappa$  en  $\kappa'$  zijn groot-heden, die men in eerste benadering als standvastigen mag beschouwen.

Nu heeft HANSEN in § 3 gevonden, dat voor eerste benadering, nl. voor oneindig kleine amplituden en standvastig gedachte  $\kappa$  en  $\kappa'$ , de integralen zijn

$$\left. \begin{aligned} \theta^2 &= \varepsilon^2 \text{Cos}^2 (\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \text{Sin}^2 (\omega t + \eta), \\ \psi &= \alpha + (\mu + \frac{1}{2} \mu') t + \text{Arctg} \left\{ \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \text{Tg} (\omega t + \eta) \right\}, \end{aligned} \right\} \cdot \cdot (195)$$

Deze duiden eene ellips met de grootste en kleinste uitwijking  $\varepsilon$  en  $\varepsilon'$  van de verticaal als baan van het zwaartepunt aan; de omlooptijd is  $\frac{2\pi}{\omega}$ ; en dit punt gaat op den tijd  $-\frac{\eta}{\omega}$  door de groote as, die zich met de snelheid  $\mu + \frac{1}{2} \mu'$  in den zin van den uurwijzer beweegt.

Daar  $\mu = n \text{Sin} \phi$  de ontbondene van de draaiingssnelheid der aarde,  $n$ , (in den zin van de beweging van den uurwijzer genomen) volgens de richting van de naar beneden gaande verticaal van het ophangpunt met de poolhoogte  $\phi$  is, hebben wij  $\mu = -\gamma_w$ . Om de beteekenis van  $\mu'$  duidelijk te maken, moeten wij teruggaan tot de integraalvergelijking (A) door HANSEN voor dit bijzondere geval ( $P = Q$ ) gevonden, namelijk (vergelijk n°. 48)

$$r = n' + n \gamma \text{Cos} \phi + n \gamma'' \text{Sin} \phi.$$

Hier is  $r$  onze  $r'$ , (153)  $\gamma$  onze  $\gamma_1$  voor een stelsel dat eene bijzondere ligging heeft, waarvoor nl.  $\beta_v = 0$  is,  $\gamma''$  onze  $\gamma_3$  (in de formule 152),  $n'$  eene willekeurige integratie standvastige, welke overeenkomstig deze vergelijking door de beginwaarde van  $r'$  wordt bepaald. Voor oneindig kleine amplituden wordt HANSEN'S

$$n \gamma \text{Cos} \phi = 0 \text{ en } r' = \frac{d\rho}{dt}.$$

Omdat onze  $\gamma_1$  oneindig klein wordt, dus  $\gamma_w$  dit eveneens is, zooals ook  $\phi$  en  $\theta$ , vereenvoudigt deze vergelijking zich tot

$$n' = \frac{d\rho}{dt} + \gamma_w.$$

Daar HANSEN  $\mu' = n' \frac{C}{A}$ , hetgeen in onze schrijfwijze  $\mu' = n' \frac{R}{P}$  wordt, stelt, vinden wij dus

$$\mu' = \frac{d\rho}{dt} \frac{R}{P} + \gamma_w \frac{R}{P},$$

en is de draaiingssnelheid van de ellips volgens HANSEN

$$\mu + \frac{1}{2}\mu' = -\gamma_w \left( \frac{2P-R}{2P} \right) + \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} \frac{R}{P}.$$

In het bijzonder geval nu, dat  $(q-p) = 0$  is, verkrijgen wij volgens n<sup>o</sup>. 35 voor de snelheid, waarmede het knooppunt van den karakteristieken cirkel over den lengtecirkel loopt,

$$-2 \left( \gamma_w + \frac{d\rho}{dt} \right) \frac{2P-R}{2P};$$

en daar de lengte van dit knooppunt geteld moet worden van uit een punt, dat met de snelheid  $-2 \frac{d\rho}{dt}$  rondloopt, draait de groote as van de slingeringsellips, van boven (d. i. van de zijde der  $-w$ -as) gezien, in den zin van den uurwijzer met de snelheid

$$-\gamma_w \frac{2P-R}{2P} + \frac{R}{2P} \frac{d\rho}{dt}.$$

Dit stemt dus overeen met de uitkomst, die HANSEN voor dit bijzonder geval verkreeg.

Dat in  $\mu'$  ook  $\gamma_w \frac{R}{2P}$  voorkomt, schijnt mij in het verder verloop van HANSEN'S verhandeling niet genoegzaam op den voorgrond gesteld.

Overgaande tot het geval van eindige amplituden wil HANSEN de differentiaalvergelijkingen voor  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$  vinden, die deze grootheden als functien van den tijd zoo bepalen, dat de integralen (195) voldoen aan (194).

Door differentiatie van (194) vindt men

$$2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta \frac{d\theta}{dt} \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + 2 \operatorname{Sin}^2 \theta \frac{d\psi}{dt} \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \\ + 2 (g' - \mu\mu') \operatorname{Sin} \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\kappa}{dt},$$

$$2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \operatorname{Sin}^2 \theta \frac{d^2\psi}{dt^2} = 2\mu \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta \frac{d\theta}{dt} + \mu' \operatorname{Sin} \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\kappa'}{dt}.$$

Hieruit

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} = & -(\omega^2 - (\mu + \frac{1}{2}\mu')^2) \operatorname{Sin} \theta + \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 - 2\mu \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta \frac{d\psi}{dt} - \\ & - \mu' \operatorname{Sin} \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\kappa}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \frac{d\kappa}{dt}, \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} = & -\frac{2 \operatorname{Cos} \theta}{\operatorname{Sin} \theta} \frac{d\theta}{dt} \left( \frac{d\psi}{dt} - \mu \right) + \frac{\mu'}{\operatorname{Sin} \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \theta} \frac{d\kappa'}{dt}. \end{aligned} \right\} (196)$$

Wij hebben hierin met HANSEN gebruik gemaakt van

$$g' - \mu \mu' = \omega^2 - (\mu + \frac{1}{2} \mu')^2 \dots \dots \dots (197)$$

HANSEN substitueert verder

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu + \mu' \frac{1 - \text{Cos } \theta}{\text{Sin}^2 \theta} + \frac{\kappa'}{\text{Sin}^2 \theta}, \dots \dots \dots (198)$$

welke laatste substitutie wij, met het oog op het volgende, niet uit zullen voeren. Deze beide substituties zijn geoorloofd; immers Art. 15 gaf voor de waarde van de standvastige  $\omega^2$ , die geen element is, eene die voor oneindig kleine amplituden (197) levert; en zulk eene standvastige mag men onveranderd aan het ongestoorde vraagstuk, (dat van oneindig kleine amplituden en standvastige  $\kappa$  en  $\kappa'$ ) ontleenen. Maar niet mag men, zooals HANSEN vervolgens in (198) doet, voor  $\kappa'$ ,  $\omega \varepsilon \varepsilon'$  stellen, wat in het ongestoorde vraagstuk waar is; want, terwijl hij immers juist  $\varepsilon$  en  $\varepsilon'$  in functiën van den tijd zoeken wil, neemt hij hiermede reeds vooraf eene integraal aan van de differentiaalvergelijkingen, die hij volgens de gewone theorie van de variatie der standvastigen verder voor deze functiën opstelt en behandelt. Hier ligt de fout, die tot de verkeerde waarden van  $D$  en  $E$  voert, op welke de uitkomsten van Art. 24 berusten.

Volgens de theorie van de variatie der standvastigen moet men de onmiddellijke differentiatien van (195) in (194) substitueeren, om de differentiaalvergelijkingen voor  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\eta$  te vinden. Volgens haar kan men stellen (S. 45),  $p = \omega t + \eta$  schrijvende,

$$\left. \begin{aligned} \theta \frac{d\theta}{dt} &= -\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p \cdot \text{Cos } p, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \mu + \frac{1}{2} \mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2}, \\ 0 &= \frac{d\varepsilon}{dt} \varepsilon \text{Cos}^2 p + \frac{d\varepsilon'}{dt} \varepsilon' \text{Sin}^2 p - \frac{d\eta}{dt} (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p \cdot \text{Cos } p, \\ 0 &= \theta^2 \frac{d\alpha}{dt} + \text{Sin } p \cdot \text{Cos } p \left( \varepsilon \frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon' \frac{d\varepsilon}{dt} \right) + \varepsilon \varepsilon' \frac{d\eta}{dt}; \end{aligned} \right\} \dots (199)$$

en met HANSEN (S. 45) vindt men verder

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -\omega^2 \theta + \frac{\omega^2 \varepsilon^2 \varepsilon'^2}{\theta^3} + 2 \left( \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \frac{\omega \text{Sin } p \cdot \text{Cos } p}{\theta} \\ &\quad - \frac{d\eta}{dt} \frac{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}{\theta} (\text{Cos}^2 p - \text{Sin}^2 p), \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= -\frac{2\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^3} \frac{d\theta}{dt} + \left( \varepsilon \frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon' \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \frac{\omega}{\theta^2} (\varepsilon^2 \text{Cos}^2 p - \varepsilon'^2 \text{Sin}^2 p) + \\ &\quad + \frac{2\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \frac{d\eta}{dt} (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p \cdot \text{Cos } p. \end{aligned} \right\} \dots (200)$$

Door in (196) voor  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$ ,  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2\psi}{dt^2}$  hunne waarden uit (199), (200) en (195) te substitueeren, vindt men volgens de theorie van de variatie der standvastigen de differentiaalvergelijkingen voor de elementen  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$ . Door vergelijking van (196) en (200) komt, met behulp van (199),

$$\left. \begin{aligned} & -(\omega^2 - (\mu + \frac{1}{2}\mu')^2) \text{Sin } \theta + \omega^2 \theta + \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \theta \left( \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right)^2 - \\ & - 2\mu \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \theta \left( \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right) - \frac{\omega^2 \varepsilon^2 \varepsilon'^2}{\theta^3} - \mu' \text{Sin } \theta \left( \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\kappa}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} - \frac{\frac{d\kappa'}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \frac{d\psi}{dt} = \frac{D}{\theta}, \end{aligned} \right\} (201)$$

en

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{2 \text{Cos } \theta \frac{d\theta}{dt}}{\text{Sin } \theta \frac{d\theta}{dt}} \left( \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right) + \frac{2\omega \varepsilon \varepsilon' \frac{d\theta}{dt}}{\theta^3 \frac{d\theta}{dt}} + \frac{\mu'}{\text{Sin } \theta \frac{d\theta}{dt}} + \frac{1}{\text{Sin } \theta \frac{d\theta}{dt}} \frac{d\kappa'}{dt} = \frac{E}{\theta^2} \\ & \text{stellende,} \\ & 2 \left( \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \text{Sin } p \cdot \text{Cos } p - \frac{d\eta}{dt} (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) (\text{Cos }^2 p - \text{Sin }^2 p) = \frac{D}{\omega}, \\ & \left( \varepsilon \frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon' \frac{d\varepsilon}{dt} \right) (\varepsilon^2 \text{Cos }^2 p - \varepsilon'^2 \text{Sin }^2 p) + \\ & \quad + 2\varepsilon \varepsilon' \frac{d\eta}{dt} (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p \cdot \text{Cos } p = \frac{E\theta^2}{\omega}. \end{aligned} \right\} (202)$$

Deze vergelijkingen zijn het, waartoe HANSEN (S. 46) komt, maar zijne waarden van  $D$  en  $E$  zijn tengevolge van de vroeger gemaakte fout geheel andere.

Wij zullen de onze naar machten van  $\theta$  ontwikkelen. Dan komt

$$\left. \begin{aligned} & (-\omega^2 + (\mu + \frac{1}{2}\mu')^2) \theta (1 - \frac{1}{6}\theta^2) + \omega^2 \theta + \theta (1 - \frac{2}{3}\theta^2) \left( \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right)^2 - \\ & - 2\mu \theta (1 - \frac{2}{3}\theta^2) \left( \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right) - \frac{\omega^2 \varepsilon^2 \varepsilon'^2}{\theta^3} - \mu' \theta (1 - \frac{1}{6}\theta^2) \left( \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\kappa}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} - \frac{\frac{d\kappa'}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \frac{d\psi}{dt} = \frac{D}{\theta}, \\ & D = \frac{\omega^2}{6} \theta^4 + \frac{1}{2} (\mu^2 - \frac{1}{4}\mu'^2) \theta^3 - \frac{2}{3} \omega^2 \varepsilon^2 \varepsilon'^2 - \frac{\mu'}{2} \omega \varepsilon \varepsilon' \theta^2 + \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\kappa}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \theta - \left( \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\theta^2} \right) \frac{\frac{d\kappa'}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \theta. \end{aligned} \right\} (203)$$

Evenzoo

$$E = -\frac{2}{3}\omega^2 \varepsilon \varepsilon' (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p . \text{Cos } p - \frac{\mu'}{6} \omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p . \text{Cos } p + \left. \begin{aligned} & + (1 + \frac{1}{3}\theta^2) \frac{d\kappa'}{dt} . \end{aligned} \right\} . \quad (203)$$

Men vergelijke deze met die, waartoe HANSEN afgezien van  $\frac{d\kappa}{dt}$  en  $\frac{d\kappa'}{dt}$  komt, namelijk (S. 28, Art. 24)

$$D = \theta^2 (\frac{1}{6}\omega^2 + \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu'^2) - \theta^2 (\frac{1}{4}\mu' + \frac{1}{15}\omega \varepsilon \varepsilon') \omega \varepsilon \varepsilon' ,$$

$$E = \theta^2 \frac{d\theta}{dt} (\frac{1}{4}\mu' + \frac{1}{15}\omega \varepsilon \varepsilon') .$$

Nu gaan wij, even als HANSEN, den invloed bepalen van die termen van  $D$  en  $E$ , waarin  $\frac{d\kappa}{dt}$  en  $\frac{d\kappa'}{dt}$  niet voorkomen. Daaruit nemen wij vooreerst die termen, die ook  $\mu$  en  $\mu'$  niet bevatten, want HANSEN verwaarloost deze ook (S. 48); dan is

$$D = \frac{\omega^2}{6} (\theta^2 - 4\varepsilon^2 \varepsilon'^2), \quad E = -\frac{2}{3}\omega^2 \varepsilon \varepsilon' (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p . \text{Cos } p \quad (204)$$

Verder uit (199)

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \text{Cos}^2 p + \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dt} \text{Sin}^2 p}{(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \text{Sin } p . \text{Cos } p} \dots \dots \dots (205)$$

Dus wordt (202)

$$\left( \varepsilon \frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon' \frac{d\varepsilon}{dt} \right) (\varepsilon^2 \text{Cos}^2 p - \varepsilon'^2 \text{Sin}^2 p) + 2 \left( \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \text{Cos}^2 p + \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dt} \text{Sin}^2 p \right) \varepsilon \varepsilon' = \frac{E \theta^2}{\omega} ,$$

$$-2 \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \varepsilon - \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dt} \right) \text{Sin } p . \text{Cos } p - \frac{\left( \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \text{Cos}^2 p + \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dt} \text{Sin}^2 p \right)}{\text{Sin } p . \text{Cos } p} (\text{Cos}^2 p - \text{Sin}^2 p) = \frac{D}{\omega} ,$$

of 
$$\varepsilon' \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{E}{\omega} ,$$

$$-\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \text{Cos}^2 p + \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dt} \text{Sin}^2 p = \frac{D}{\omega} \text{Sin } p . \text{Cos } p ,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{E \varepsilon \text{Cos}^2 p + D \varepsilon' \text{Sin } p . \text{Cos } p}{\omega \theta^2} , \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{E \varepsilon' \text{Sin}^2 p - D \varepsilon \text{Sin } p . \text{Cos } p}{\omega \theta^2} , \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (206)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{D}{\omega \theta^2} \frac{\varepsilon^2 \text{Cos}^2 p - \varepsilon'^2 \text{Sin}^2 p}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} + \frac{2E \varepsilon \varepsilon' \text{Cos } p . \text{Sin } p}{\omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} , \dots (207)$$

$$\begin{aligned}
-\theta^2 \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{E(\varepsilon^2 \cos^2 p - \varepsilon'^2 \sin^2 p) \sin p \cdot \cos p + 2D\varepsilon\varepsilon' \sin^2 p \cdot \cos^2 p}{\omega \theta^2} \\
&- \frac{D\varepsilon\varepsilon' \varepsilon^2 \cos^2 p - \varepsilon'^2 \sin^2 p}{\omega \theta^2} + \frac{2E\varepsilon^2 \varepsilon'^2 \cos p \cdot \sin p}{\omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} = \\
&= \frac{E(\varepsilon^4 \cos^2 p + \varepsilon'^4 \sin^2 p + \varepsilon^2 \varepsilon'^2) \sin p \cdot \cos p}{\omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} + \\
&+ \frac{D\varepsilon\varepsilon' ((\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \sin^2 p \cdot \cos^2 p - \varepsilon^2 \cos^2 p + \varepsilon'^2 \sin^2 p)}{\omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)},
\end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{E(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)}{\omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \sin p \cdot \cos p + \frac{D\varepsilon\varepsilon'}{\omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} (\cos^2 p - \sin^2 p). \quad (208)$$

Dit zijn de vergelijkingen van HANSEN in Art. 23. In deze moet men (204) substitueeren.

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{\omega - 4\varepsilon^2 \varepsilon' (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \sin p \cdot \cos^3 p + \varepsilon' (\theta^4 - 4\varepsilon^2 \varepsilon'^2) \sin p \cdot \cos p}{6 \theta^2} = \\
&= \frac{\omega}{6} \varepsilon' \theta^2 \sin p \cdot \cos p - \frac{2}{3} \frac{\omega \varepsilon^2 \varepsilon'}{\theta^2} ((\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \cos^2 p + \varepsilon'^2) \sin p \cdot \cos p, \\
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{\omega}{6} \varepsilon' \theta^2 \sin p \cdot \cos p - \frac{2}{3} \omega \varepsilon^2 \varepsilon' \sin p \cdot \cos p, \quad \dots \quad (209)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\omega - 4\varepsilon \varepsilon'^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \sin^3 p \cdot \cos p - (\theta^4 - 4\varepsilon^2 \varepsilon'^2) \varepsilon \cos p \cdot \sin p}{6 \theta^2} = \\
&= -\frac{\omega}{6} \varepsilon \theta^2 \sin p \cdot \cos p + \frac{2}{3} \omega \varepsilon \frac{\sin p \cdot \cos p (-\varepsilon'^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \sin^2 p + \varepsilon^2 \varepsilon'^2)}{\theta^2}, \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{\omega}{6} \varepsilon \theta^2 \sin p \cdot \cos p + \frac{2}{3} \omega \varepsilon \varepsilon'^2 \sin p \cdot \cos p, \quad \dots \quad (210)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{\omega}{6} \left\{ \frac{-8\varepsilon^2 \varepsilon'^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \cos^2 p \cdot \sin^2 p - 4\varepsilon^2 \varepsilon'^2 (\varepsilon'^2 \sin^2 p - \varepsilon^2 \cos^2 p)}{(\varepsilon^2 \cos^2 p + \varepsilon'^2 \sin^2 p) (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon^2 \cos^2 p - \varepsilon'^2 \sin^2 p}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \theta^2 \right\} = \\
&= -\frac{\omega}{6} \left\{ 4 \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \cos^2 p \cdot \sin^2 p + \varepsilon'^2 \sin^2 p - \varepsilon^2 \cos^2 p}{(\varepsilon^2 \cos^2 p + \varepsilon'^2 \sin^2 p) (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \varepsilon^2 \varepsilon'^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon^2 \cos^2 p - \varepsilon'^2 \sin^2 p}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \theta^2 \right\},
\end{aligned}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\omega}{6} \left\{ \frac{4\varepsilon^2 \varepsilon'^2 (\sin^2 p - \cos^2 p)}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} + \frac{\varepsilon^2 \cos^2 p - \varepsilon'^2 \sin^2 p}{\varepsilon - \varepsilon'^2} \theta^2 \right\}. \quad (211)$$

Eindelijk

$$\theta^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{6} \left\{ 4(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \sin^2 p \cdot \cos^2 p + \frac{\theta^4 - 4\varepsilon^2 \varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} (\cos^2 p - \sin^2 p) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega}{6} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \left\{ 4((\varepsilon^4 - \varepsilon'^4) \operatorname{Sin}^2 p \cdot \operatorname{Cos}^2 p - \varepsilon^2 \varepsilon'^2 (\operatorname{Cos}^2 p - \operatorname{Sin}^2 p)) + \right. \\
&\quad \left. + \theta^4 (\operatorname{Cos}^2 p - \operatorname{Sin}^2 p) \right\} = \\
&= \frac{\omega}{6} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \left\{ 4(\varepsilon^4 \operatorname{Cos}^2 p - \varepsilon'^4 \operatorname{Sin}^2 p - \varepsilon^2 \varepsilon'^2 (\operatorname{Cos}^2 p - \operatorname{Sin}^2 p) - \right. \\
&\quad \left. - (\varepsilon^4 \operatorname{Cos}^4 p - \varepsilon'^4 \operatorname{Sin}^4 p)) + \theta^4 (\operatorname{Cos}^2 p - \operatorname{Sin}^2 p) \right\}, \\
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\omega}{6} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \left\{ 4(\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 p - \varepsilon'^2 \operatorname{Cos}^2 p) + (\varepsilon'^3 - \varepsilon^3) \operatorname{Sin}^2 p \cdot \operatorname{Cos}^2 p + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^4 p - \varepsilon'^2 \operatorname{Sin}^4 p \right\}. \dots (212)
\end{aligned}$$

Bij integratie vindt men

$$\left. \begin{aligned}
\delta \varepsilon' &= \frac{1}{24} \varepsilon' (-\varepsilon^2 \operatorname{Cos}^4 p + \varepsilon'^2 \operatorname{Sin}^4 p - 8 \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 p), \\
\delta \varepsilon &= \frac{1}{24} \varepsilon (\varepsilon^3 \operatorname{Cos}^4 p - \varepsilon'^2 \operatorname{Sin}^4 p + 8 \varepsilon'^2 \operatorname{Sin}^2 p), \\
\delta \eta &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{2 \varepsilon^2 \varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \operatorname{Sin} 2p - \frac{3}{8} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) p - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\operatorname{Sin} 2p}{8(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} (\varepsilon^4 (\operatorname{Cos}^2 p + \frac{3}{2}) + \varepsilon'^4 (\operatorname{Sin}^2 p + \frac{3}{2})) \right\}, \\
\delta \alpha &= \frac{\varepsilon \varepsilon'}{6(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \left\{ -(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \operatorname{Sin} 2p + 2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) p + \frac{3}{8} (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) p + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\operatorname{Sin} 2p}{8} (\varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 p + \frac{3}{2}) + \varepsilon'^2 (\operatorname{Sin}^2 p + \frac{3}{2}) - \frac{1}{8} (\varepsilon'^2 - \varepsilon^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32} (\varepsilon'^2 - \varepsilon^2) \operatorname{Sin} 4p \right\},
\end{aligned} \right\} (213)$$

waarbij gebruikt werd

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{Cos}^4 p \, dp &= \frac{\operatorname{Sin} p}{4} \left\{ \operatorname{Cos}^3 p + \frac{3}{2} \operatorname{Cos} p \right\} + \frac{3}{8} p, \\
\int \operatorname{Sin}^4 p \, dp &= -\frac{\operatorname{Cos} p}{4} \left\{ \operatorname{Sin}^3 p + \frac{3}{2} \operatorname{Sin} p \right\} + \frac{3}{8} p, \\
\int \operatorname{Cos}^2 p \, dp &= \frac{\operatorname{Sin} p}{2} \operatorname{Cos} p + \frac{p}{2}, \\
\int \operatorname{Sin}^2 p \, dp &= -\frac{\operatorname{Cos} p \cdot \operatorname{Sin} p}{2} + \frac{p}{2}.
\end{aligned}$$

Deze formules (213) komen voor die op S. 49 in de plaats, wanneer men alleen let op de door ons genomen termen van  $D$ .

Wanneer wij vervolgens de periodische termen weglaten, komt

$$\left. \begin{aligned}
\delta \varepsilon &= 0, \\
\delta \varepsilon' &= 0, \\
\delta \eta &= -\frac{1}{16} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \omega t, \\
\delta \alpha &= \frac{3}{8} \omega \varepsilon \varepsilon' t.
\end{aligned} \right\} \dots (214)$$

De drie eerste vindt HANSEN ook, maar het juiste bewijs er van is eerst op deze wijze geleverd. Voor de laatste formule vindt HANSEN  $\frac{1}{2} \omega \varepsilon \varepsilon' t$ ; en het was deze waarde, die mij opmerkzaam maakte op de fout op S. 44 gemaakt, die zoowel aan het oog van HANSEN als van den beoordeelaar van zijne prijsvraag is ontsnapt, en die eindelijk ook door W. LEHMANN<sup>1)</sup> in zijne bewerking van HANSEN's prijsvraag, — ofschoon hij lezers onderstelt „die diese klassische Preisschrift nicht nur zur Hand sondern auch gründlich studirt haben” — over 't hoofd is gezien.

Wij zullen nu nog de termen, die  $\mu$  en  $\mu'$  bevatten, beschouwen.

Dan moet men volgens (203)

$$D = \left(\frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu'^2\right)\theta^4 - \frac{\mu'}{2}\omega\varepsilon\varepsilon'\theta^2,$$

$$E = -\frac{\mu'}{6}\omega\theta^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\text{Sin } p.\text{Cos } p$$

nemen.

Van  $\mu$  is afhankelijk

$$D = \frac{1}{2}\mu^2\theta^4,$$

hetgeen met (206), (207), (208) geeft

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{\mu^2}{2} \frac{\varepsilon' \text{Sin } p.\text{Cos } p}{\omega} \theta^2,$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{dt} = -\frac{\mu^2}{2} \frac{\varepsilon \text{Sin } p.\text{Cos } p}{\omega} \theta^2,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu^2}{2} \left( \frac{\varepsilon^2 \text{Cos}^2 p - \varepsilon'^2 \text{Sin}^2 p}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \right) \frac{\theta^2}{\omega},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\mu^2 \varepsilon \varepsilon' \theta^2}{2\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} (\text{Cos}^2 p - \text{Sin}^2 p),$$

en dus bij verwaarloozing van de periodische termen

$$\delta\varepsilon' = 0, \delta\varepsilon = 0, \delta\eta = -\frac{3}{16} \frac{\mu^2}{\omega} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)t, \delta\alpha = \frac{\mu^2 \varepsilon \varepsilon'}{8\omega} t,$$

en deze kan men, daar  $\mu^2$  inderdaad uiterst klein is, verwaarloozen. Evenzoo geeft de term van  $D$

$$-\frac{1}{8}\mu'^2\theta^4,$$

$$\delta\varepsilon' = 0, \delta\varepsilon = 0, \delta\eta = \frac{3}{64} \frac{\mu'^2}{\omega} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)t, \delta\alpha = -\frac{\mu^2}{32} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\omega} t. \quad (215)$$

Verder blijven van  $D$  en  $E$  nog over

<sup>1)</sup> *Astron. Nachr.* n°. 925 u. s. w. Bd. 39 und 40.

$$D = -\frac{3\mu'}{6} \omega \varepsilon \varepsilon' \theta^2, \quad E = -\frac{\mu'}{6} \omega \theta^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Cos} p,$$

die met (206), (207), (208) geven

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{\mu'}{6} ((\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Cos}^3 p \varepsilon + 3\varepsilon \varepsilon'^2 \operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Cos} p),$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\mu'}{6} ((\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \operatorname{Sin}^3 p \cdot \operatorname{Cos} p \varepsilon' - 3\varepsilon^2 \varepsilon' \operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Cos} p),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu \varepsilon \varepsilon'}{6} \left( \frac{-3(\varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 p - \varepsilon'^2 \operatorname{Sin}^2 p) + 2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \operatorname{Sin}^2 p \cdot \operatorname{Cos}^2 p}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \right),$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\mu'}{6} \left( \frac{-(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \operatorname{Sin}^2 p \cdot \operatorname{Cos}^2 p + 3\varepsilon^2 \varepsilon'^2 (\operatorname{Cos}^2 p - \operatorname{Sin}^2 p)}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \right).$$

En dus met (215)

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon' &= 0, \quad \delta \varepsilon = 0, \\ \delta \eta &= -\frac{5}{24} \varepsilon \varepsilon' \mu' t + \frac{3}{64} \frac{\mu'^2}{\omega} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) t, \\ \delta \alpha &= -\frac{1}{48} \mu' (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) - \frac{\mu'^2}{32} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\omega} t. \end{aligned} \right\} \dots \dots (216)$$

Hieruit ziet men, dat wanneer  $\mu'$  niet zeer klein gesteld wordt, in den slingertijd en de draaiing van de groote as der slingerings-ellipsen, voor de draaiing van den slinger om zijne as, nog eene verbetering moet worden aangebracht, die door (216) wordt bepaald.

Bij eene andere gelegenheid zal ik ook de storingen in de elementen, ten gevolge daarvan, dat  $q-p$  niet juist nul is, langs den door HANSEN gevolgden weg bepalen, en daardoor de uitkomsten van Hoofdst. II en van § 6 van dit Hoofdstuk onmiddellijk bij de formules van HANSEN aansluiten.

### § 9. Over de formule van BRAVAIS.

50. Wij willen hier nog de formules afleiden, die BRAVAIS <sup>1)</sup> ter berekening van zijne proeven gebruikte, en die in de onze als bijzonder geval natuurlijk bevat zijn. Verwaarloozen wij dus  $R$  in § 5 en stellen wij  $p-q=0$  in § 6, zonder iets over  $R$  te onderstellen, zoo hebben wij respectievelijk het geval van den enkelvoudigen of van den samengestelden slinger, wanneer deze een omwentelingslichaam om de verbindingslijn van ophangpunt en zwaartepunt is, en om het eerste vrij draaijen kan. De slingeringsellips blijft, we-

<sup>1)</sup> LIOUVILLE, T. 19.

gens  $s =$  standvastig, voortdurend dezelfde, en draait met de snelheid  $-(\gamma' + \mu_1 s)$ . Neemt men als slingertijd dien, welke verloopt tusschen twee opeenvolgende overgangen van het bewegende punt over dezelfde helft van de groote as van zijne baan, dan laat zich het verschil van den slingertijd in de gestoorde en in de ongestoorde

beweging als volgt berekenen.  $\frac{2\pi}{p} \frac{d\tau}{dt}$  geeft aan, om hoeveel het

punt in zijne baan ten opzichte van de  $y$ -as in elke slingering achterblijft. Het achterblijven ten opzichte van de groote as van de ellips verschilt hiervan tengevolge van de gelijktijdig plaats grijpende draaiing van de ellips over de coördinatenassen, om den tijd, waarin het punt in de ellips van het snijpunt met de  $y$ -as bij het begin der slingering tot haar snijpunt bij het einde van de slingering loopt.

Deze tijd staat tot  $\frac{2\pi}{p}$  in dezelfde verhouding als de kleine elliptische sector, die gedurende eene slingering over de eene helft van de  $y$ -as heen beweegt, tot het geheele oppervlak der ellips. Vatten wij die helft van de  $y$ -as in het oog, welke met positieve snelheid in de richting van de  $x$ -as overschreden wordt, zoo vindt men voor deze verhouding gemakkelijk

$$(\gamma' + \mu_1 s) \frac{\alpha' h' \text{Sin}^2 T_0}{\pi \alpha b M} \dots \dots \dots (217)$$

Want de inhoud van den elliptischen sector, die in  $\frac{2\pi}{p}$  over de  $y$ -as beweegt, is

$$\frac{2\pi}{p} \cdot \frac{1}{2} \frac{dX}{dt} y_i^{02},$$

waar  $y_i^0$  de waarde van  $y_i$  is, wanneer het punt met positieve snelheid deze as overschrijdt. Nu is volgens (164)

$$\frac{1}{2} y_i^{02} = \frac{\alpha_0}{p^2} \text{Sin}^2 q t'';$$

daar volgens dezelfde formules en wegens  $x_i = 0$ ,

$$\text{Sin} p t' = 0, \text{ en dus } \text{Sin}^2 q t'' = \text{Sin}^2 T_0$$

is bij het overschrijden van de  $y$ -as, en verder

$$\frac{dX}{dt} = -(\gamma' + \mu_1 s)$$

gegeven was, verkrijgen wij

$$\frac{1}{2} y_1^2 \frac{dX}{dt} = - \frac{\gamma' + \mu_1 s}{p^2} \alpha_0 \text{Sin}^2 T_0.$$

Voor de hoekoppervlakte  $O$  van de ellips vonden wij, afgezien van het teeken,

$$\frac{2 \pi h'}{M} \text{Sin} T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')}.$$

(Zie (173) en (174)). Het  $xy$ -stelsel is genomen in een horizontaal vlak op den afstand  $\sqrt{P}$  van het ophangpunt; dus 't oppervlak van de ellips, beschreven door het snijpunt van de slingeras met dit horizontaal vlak,

$$\frac{2 \pi}{p^2} \text{Sin} T_0 \sqrt{\alpha_0(h' - \alpha_0)},$$

met  $\alpha' = \frac{\alpha_0}{h}$ ; dus komt voor de verhouding van het oppervlak van den sector, die over de  $y_1$ -as beweegt, tot het geheele oppervlak van de ellips

$$-(\gamma' + \mu_1 s) \frac{\alpha' \sqrt{\text{Sin}^2 T_0}}{2 \pi \sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \frac{2 \pi}{p};$$

deze grootheid is, afgezien van het teeken, de verhouding van wat aan  $\tau$  moet worden toegevoegd in eene volledige slinging tot  $\frac{2 \pi}{p}$ ; en dus moet aan  $\frac{d\tau}{dt}$ , afgezien van het teeken, worden toegevoegd

$$-(\gamma' + \mu_1 s) \frac{\alpha' \sqrt{\text{Sin}^2 T_0}}{p \sqrt{\alpha'(1-\alpha')}}.$$

Is de beweging in de ellips, als in de fig. 9, negatief, zoo moet deze tijd afgetrokken worden; en moet dus  $-\sqrt{\text{Sin}^2 T_0}$  in plaats van  $\sqrt{\text{Sin}^2 T_0}$  worden genomen, terwijl dan is volgens (102)  $\text{Sin} T_0$  zelf  $= +\sqrt{\text{Sin}^2 T_0}$ . Is de beweging positief, als in fig. 10, dan moet die tijd bij  $\tau$  worden opgeteld, maar dan is  $\text{Sin} T_0$  zelf  $-\sqrt{\text{Sin}^2 T_0}$ ; zoodat men steeds moet nemen

$$(\gamma' + \mu_1 s) \frac{\alpha' \text{Sin} T_0}{p \sqrt{\alpha'(1-\alpha')}},$$

als correctie in  $\frac{d\tau}{dt}$  om  $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)$  ten opzichte van de groote as te vinden.

Dan vindt men echter

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = \frac{a^2 + b^2}{16} \dots \dots \dots (218)$$

eene bekende formule voor den enkelvoudigen slinger, die men reeds bij LAGRANGE <sup>1)</sup> en voor het geval van LAGRANGE's samengestelden slinger (zie (214)) bij HANSEN (l. c. S. 49) vindt; en die uitdrukt, dat de slingertijd in de verhouding

$$1 : 1 + \frac{a^2 + b^2}{16}$$

vergroot wordt. Bij cirkelvormige slingeren moet men den slingertijd nemen ten opzichte van eene as, die in den cirkel met de snelheid  $-(\gamma' + \mu, s)$  rondloopt. Is  $\gamma' = 0$ , zoo blijft alleen de beweging van de groote as tengevolge van de eindige amplituden over, die met de snelheid  $\frac{3}{8} \frac{\pi}{t} \frac{a' b'}{E^2} = \frac{3}{8} \frac{\pi}{t} a b$  (zie n°. 47) plaats vindt; deze as doorloopt dus in  $2t$ , den hoek  $\frac{3}{8} \pi a b$ , die tot den geheelen omtrek in de verhouding  $\frac{3}{8} a b$  staat. Trekt men derhalve in de baan van een punt, dat op de verbindingslijn van ophangpunt en zwaartepunt van den slinger ligt, uit het middelpunt in willekeurige richting een straal; en verstaat men onder slingertijd den tijd, die tusschen twee opeenvolgende overschrijdingen van dienzelfden vasten straal verloopt, zoo is deze in de verhouding

$$1 : 1 - \frac{3}{8} a b$$

gewijzigd; of de slingertijd, zoo opgevat, staat bij kleine maar eendige cirkelvormige slingeren, tot die bij oneindig kleine amplituden in de verhouding

$$1 - \frac{a^2}{4} : 1.$$

Dezelfde opvatting van den slingertijd legt BRAVAIS <sup>2)</sup> klaarblijkelijk ten grondslag aan zijne gevolgtrekking, dat de slingertijd in 't algemeen zonder nadere aanwijzing over den straal, ten opzichte waarvan men hem bepaalt, voorgesteld kan worden als functie van de assen der ellips alleen; en wel door

$$t_{SB} = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{l}}{g}} \left( 1 + \frac{a^2 + b^2 - 6ab}{16} \right), \dots \dots (219)$$

waar  $g$  de versnelling van de zwaartekracht aanduidt.

Het valt echter terstond in het oog, dat dit niet het geval is; want de zoo opgevatte slingertijd is afhankelijk niet alleen van den vorm van de ellips, maar ook (170) van hare ligging ten opzichte

<sup>1)</sup> *Méc.* II. 177, Ed. BERTRAND.

<sup>2)</sup> LIOUVILLE, T. 19, p. 11.

van den gekozen vasten straal (het gekozen verticaal vlak). Ofschoon er nu op dit punt eene verwarring in de bewijsvoering van BRAVAIS bestaat, past hij de formule toch juist toe; want hij brengt in den waargenomen tijd van overgang van het bewegend punt over een zekeren straal van zijne baan eene verbetering aan, nl. het verschil van den tijd, waarin het van daar tot aan de groote as loopt, en van den tijd, waarin het, in een cirkel met gelijkmatige snelheid rondlopende, hetzelfde punt van de groote as zou bereiken. Deze laatste tijd bevat den tijd, waarin de hoek van de groote assen der ellips bij het begin en bij het einde van de slingering door het, met eenparige snelheid in den cirkel rondlopende, punt afgelegd wordt. De beteekenis van den door BRAVAIS in de formule (219) bedoelden slingertijd  $t_{SB}$  is <sup>1)</sup> dus die, welke men na het aanbrengen van de beschreven verbetering uit den slingertijd ten opzichte van een vasten straal vindt. En wanneer  $\gamma'$  niet, zooals wij tot nog toe aannamen, 0 is, is de weg, die dat denkbeeldige punt over den cirkel in eene slingering aflegt, samengesteld uit  $-2\gamma' t$ , en uit  $\frac{3}{4}\pi ab$ , de laatste in den zin van de beweging in de ellips; men vindt dan den slingertijd, nadat de correctie voor de afwijking van de groote as van den gekozen straal is aangebracht,

$$t_{SB'} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{a^2 + b^2 - 6ab}{16} \pm \frac{\sqrt{\gamma'^2 t}}{\pi} \right), \dots (220)$$

waar het teeken  $\pm$  genomen moet worden, al naar mate  $\gamma'$  en de zin van de beweging in de ellips dezelfde of tegengesteld zijn. Dit is de formule, volgens welke BRAVAIS na het aanbrengen van de meer genoemde verbetering voor de groote as uit den tijd, die tusschen opeenvolgende doorgangen van zijn slinger door een zelfde verticaalvlak (dat van de as van zijn theodoliet) verloopt, de draaiingssnelheid der aarde,  $\gamma'$ , berekent.

BRAVAIS stelde bij zijne afleidingen  $R = 0$ , dus  $\gamma' = \gamma_w$ ; uit de gegeven afleiding blijkt echter, dat ook voor LAGRANGE's geval van een samengestelden slinger dezelfde formules gelden, en dat hierbij slechts

$$\gamma''' = \frac{2P - R}{2P} \left( \gamma_w + \frac{\rho_0}{R} \right),$$

voor  $\gamma_w$  in de plaats komt.

---

<sup>1)</sup> Zooals ook blijkt uit de slotzinnen van zijne *Note sur une formule de LAGRANGE, relative au mouvement pendulaire*, l. c. p. 49 et 50.

**WISKUNDIG GEDEELTE,**

**2<sup>e</sup> STUK.**

**OVER DE BEWEGING VAN EEN CARDANISCH  
OPGEHANGEN SLINGER MET INACHTNEMING  
VAN DE DRAAIING DER AARDE EN VAN  
DE WRIJVING.**



# HOOFDSTUK I.

## AFLEIDING VAN DE FORMULEN.

---

In het experimenteel gedeelte van dit proefschrift wordt een slinger beschreven, waarmede de verschijnselen, afgeleid in Hoofdst. II en III van het 1<sup>e</sup> Stuk „Over de betrekkelijke beweging,” proefondervindelijk door mij zijn nagegaan. Bij de vergelijking van de waarnemingen en van de theorie in haar eenvoudigsten vorm, d. i. bij de eenvoudigste onderstellingen over den slinger, vertoonden zich regelmatige afwijkingen, die mij tot tweeerlei theoretische ontwikkelingen voerden. Zij zijn in deze afdeeling te zamen gevoegd en vormen het wiskundig betoog der uitkomsten, die in het proefondervindelijk gedeelte zonder verder bewijs worden gebruikt.

Bij deze ontwikkelingen heb ik slechts die afwijkingen van de eenvoudigste onderstellingen over den slinger in aanmerking genomen, welke men bij de proeven moeilijk vermijden kan; en ben ik van de behandeling van overeenkomstige vraagstukken, wier algemeene oplossing evenmin gevonden kon worden, zooals b. v. die van HANSEN en DUMAS (zie 1<sup>e</sup> Stuk, n<sup>o</sup>. 11), vooral daarin afgeweken, dat de benadering steeds slechts zoover voortgezet wordt, als de waarneming dit vordert; zoo staat deze afdeeling in het nauwste verband met het experimenteel gedeelte, en moet het bewijs, dat de achtereenvolgens gemaakte onderstellingen op mijn slinger toepasselijk zijn, ook in het laatste gezocht worden.

De verkregen formules zijn verder toegepast op de verklaring van de afwijkingen, die bij de proeven van FOUCAULT en BRAVAIS werden waargenomen.

§ 1. *Vorming van de karakteristieke functie. Splitsing in eene ongestoorde beweging en eene storingsfunctie.*

Wij nemen vast in de aarde een linksch coördinatenstelsel der  $x_0, y_0, z_0$  aan. Den oorsprong plaatsen wij in de scherpe kant van het naar boven gerichte vaste mes en wel in het ophangpunt van den slinger. Als  $z_0$ -as nemen wij de naar beneden gerichte verbindingslijn van het ophangpunt en het zwaartepunt van het slingerlichaam, wanneer dit zich in zijn evenwichtsstand (in rust) bevindt. Wanneer de slinger een mathematische was, zou dit de naar beneden gerichte verticaal op de plaats van de slingerende massa zijn; nu wij een samengestelden slinger hebben wijkt de  $z_0$ -as iets, maar uiterst weinig, af van de verticaal, zooals wij bij formule (35) nader uiteen zullen zetten. Het  $x_0 z_0$ -vlak leggen wij door de  $z_0$ -as en de scherpe kant van het vaste mes. Eene kleine draaiing  $m_1$  van dit coördinatenstelsel om de  $y_0$ -as, links omgaande positief gerekend, moge de  $x_0$ -as in de scherpe kant van het vaste mes brengen. De coördinaten van het punt  $x_0, y_0, z_0$  ten opzichte van dit nieuwe coördinatenstelsel zullen wij  $x, y, z$  noemen; dan is

$$\left. \begin{aligned} z &= z_0 \cos m_1 + x_0 \sin m_1, \\ x &= x_0 \cos m_1 - z_0 \sin m_1, \\ y &= y_0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Op het vaste mes leggen wij een lichaam, dat er om draaien kan, den drager; en hieraan wordt het slingerlichaam met een tweede mes zoo opgehangen, dat de naar beneden gerichte scherpe kant van het laatste, de scherpe kant van het eerste mes juist in den oorsprong van de  $x_0, y_0, z_0$  coördinaten snijdt. Wanneer nu het geheel zich in zijn evenwichtsstand (in rust) bevindt, moge eene links omgaande positief gerekende draaiing  $m_2$  van het  $x, y, z$ -stelsel om de  $x$ -as het  $xy$ -vlak in het vlak van de scherpe kanten van beide messen brengen. Noemen wij de coördinaten ten opzichte van het  $xyz$ -stelsel in zijn nieuwen stand  $x', y', z'$ , dan is dus

$$\left. \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos m_2 + z \sin m_2, \\ z' &= z \cos m_2 - y \sin m_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Eindelijk willen wij aannemen, dat eene nieuwe draaiing  $m_3$  van het  $x', y', z'$ -stelsel, om de  $z'$ -as, links omgaande positief gerekend, de  $y'$ -as in de scherpe kant van het bovenmes doet vallen.

Wij kunnen er nu toe overgaan om de plaats van elk punt van den drager en van het slingerlichaam, wanneer het geheel in een willekeurigen anderen stand gebracht is, uit te drukken door de draaiingen, die om elk der messen plaats gevonden hebben, en door de coördinaten dier punten ten opzichte van coördinatenstelsels, die respectieve met beide deelen van den toestel vast verbonden zijn.

Tot coördinatenstelsel vast met den drager verbonden kiezen wij dat, hetwelk in den evenwichtsstand van den toestel met dat der  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  samenvalt; heeft dus eene draaiing om het vaste mes,  $\mu$ , linksom gaande positief gerekend, van uit den evenwichtsstand plaats gegrepen, zoo staan de coördinaten ten opzichte van het vast met de aarde verbonden stelsel der  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , tot de onveranderlijke coördinaten van de punten van den drager ten opzichte van het  $x_1, y_1, z_1$ -stelsel en tot de draaiing  $\mu$  in de volgende betrekking

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y' \cos \mu + z' \sin \mu, \\ z_1 &= z' \cos \mu - y' \sin \mu, \\ x_1 &= x'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Dezelfde vergelijkingen bepalen de coördinaten van de punten van het slingerlichaam ten opzichte van het met de aarde vast verbonden stelsel der  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , wanneer  $\mu$  en de coördinaten dier punten ten opzichte van het met den drager vast verbonden stelsel gegeven zijn. In plaats hiervan willen wij echter eerst een ander stelsel, dat eveneens vast met den drager verbonden is, invoeren door het  $x_1, y_1, z_1$ -stelsel om de  $z_1$ -as te draaien om een linksomgaande positief getelde hoek  $m_2$ , en de  $y_1$ -as in de scherpe kant van het tweede mes te brengen. De coördinaten ten opzichte van dit stelsel  $x_2, y_2, z_2$  worden bepaald door

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos m_2 + y_1 \sin m_2, \\ y_2 &= y_1 \cos m_2 - x_1 \sin m_2, \\ z_2 &= z_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Heeft nu om het tweede mes eene draaiing  $\nu$  plaats gevonden en kiest men als stelsel, dat vast met het slingerlichaam verbonden is,  $x, y, z$ , datgene, hetwelk met dat der  $x_2, y_2, z_2$  samenvalt, zoolang het slingerlichaam ten opzichte van den drager dezelfde ligging behoudt als in den evenwichtsstand van den slinger, zoo is dit coördinatenstelsel nu  $\nu$  om de  $y_2$  en  $z_2$ -as gedraaid, en

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_2 \cos \nu - z_2 \sin \nu, \\ y_3 &= y_2, \\ z_3 &= z_2 \cos \nu + x_2 \sin \nu. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Hiermede is ook de ligging van elk punt van het slingerlichaam uitgedrukt in de onveranderlijke  $x_3, y_3, z_3$  en in de draaiingen  $\mu$  en  $\nu$ .

Volgens het vorige kan men schrijven (3, 4, 5)

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', & x' &= \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 + \alpha_3 z_3, \\ y_3 &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z', & y' &= \beta_1 x_3 + \beta_2 y_3 + \beta_3 z_3, \\ z_3 &= \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z', & z' &= \gamma_1 x_3 + \gamma_2 y_3 + \gamma_3 z_3, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wanneer

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \text{Cos } m_2 \text{ Cos } \nu, & \beta_1 &= \text{Cos } \mu \text{ Sin } m_2 \text{ Cos } \nu + \text{Sin } \mu \text{ Sin } \nu, \\ & & \gamma_1 &= \text{Sin } \mu \text{ Sin } m_2 \text{ Cos } \nu - \text{Cos } \mu \text{ Sin } \nu, \\ \alpha_2 &= -\text{Sin } m_2, & \beta_2 &= \text{Cos } \mu \text{ Cos } m_2, & \gamma_2 &= \text{Sin } \mu \text{ Cos } m_2, \\ \alpha_3 &= \text{Cos } m_2 \text{ Sin } \nu, & \beta_3 &= \text{Sin } \nu \text{ Cos } \mu \text{ Sin } m_2 - \text{Sin } \mu \text{ Cos } \nu, \\ & & \gamma_3 &= \text{Cos } \mu \text{ Cos } \nu + \text{Sin } \nu \text{ Sin } \mu \text{ Sin } m_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Evenzoo met (1) en (2)

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1'' x_0 + \alpha_2'' y_0 + \alpha_3'' z_0, & x_0 &= \alpha_1'' x' + \beta_1'' y' + \gamma_1'' z', \\ y' &= \beta_1'' x_0 + \beta_2'' y_0 + \beta_3'' z_0, & y_0 &= \alpha_2'' x' + \beta_2'' y' + \gamma_2'' z', \\ z' &= \gamma_1'' x_0 + \gamma_2'' y_0 + \gamma_3'' z_0, & z_0 &= \alpha_3'' x' + \beta_3'' y' + \gamma_3'' z', \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

als

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1'' &= \text{Cos } m_1, & \alpha_2'' &= 0, & \alpha_3'' &= -\text{Sin } m_1, \\ \beta_1'' &= \text{Sin } m_1 \text{ Sin } m_3, & \beta_2'' &= \text{Cos } m_3, & \beta_3'' &= \text{Cos } m_1 \text{ Sin } m_3, \\ \gamma_1'' &= \text{Sin } m_1 \text{ Cos } m_3, & \gamma_2'' &= -\text{Sin } m_3, & \gamma_3'' &= \text{Cos } m_1 \text{ Cos } m_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Om de beweging van den slinger te leeren kennen, is het nu in de eerste plaats noodig zijne levende kracht uit te drukken. Daartoe willen wij nog een coördinatenstelsel invoeren, namelijk dat van de hoofdtraagheidsassen van het slingerlichaam in den oorsprong der  $x_3, y_3, z_3$  om welken het draait. De coördinaten van het punt  $x_3, y_3, z_3$  ten opzichte hiervan zullen wij met  $u, v, w$  aanduiden en

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1' x_3 + \beta_1' y_3 + \gamma_1' z_3, \\ v &= \alpha_2' x_3 + \beta_2' y_3 + \gamma_2' z_3, \\ w &= \alpha_3' x_3 + \beta_3' y_3 + \gamma_3' z_3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

stellen. De negen cosinus  $\alpha_1' \dots \gamma_3'$  kan men als volgt door drie hoeken  $\phi_0, \theta_0, \psi_0$  uitdrukken. Men draaie het stelsel der  $x_3, y_3, z_3$  linksomgaande positief tellende  $\psi_0$  om de  $z_3$ -as, dan evenzoo  $\phi_0$  om de  $x_3$ -as in hare nieuwe ligging en eindelijk evenzoo  $\theta_0$  om de  $y_3$ -as in den stand, dien zij nu inneemt; dan is

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= \text{Cos } \theta_0 \text{ Cos } \psi_0 - & \beta_1' &= \text{Sin } \phi_0 \text{ Sin } \theta_0 \text{ Cos } \psi_0 + \\
&\quad - \text{Sin } \phi_0 \text{ Sin } \theta_0 \text{ Sin } \psi_0, & &\quad + \text{Cos } \theta_0 \text{ Sin } \psi_0, \\
\alpha_2' &= - \text{Cos } \phi_0 \text{ Sin } \psi_0, & \beta_2' &= \text{Cos } \phi_0 \text{ Cos } \psi_0, \\
\alpha_3' &= \text{Sin } \theta_0 \text{ Cos } \psi_0 + & \beta_3' &= - \text{Sin } \phi_0 \text{ Cos } \theta_0 \text{ Cos } \psi_0 + \\
&\quad + \text{Sin } \phi_0 \text{ Cos } \theta_0 \text{ Sin } \psi_0, & &\quad + \text{Sin } \theta_0 \text{ Sin } \psi_0, \\
\gamma_1' &= - \text{Cos } \phi_0 \text{ Sin } \theta_0, & & \\
\gamma_2' &= \text{Sin } \phi_0, & & \\
\gamma_3' &= \text{Cos } \phi_0 \text{ Cos } \theta_0. & &
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \\ \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{aligned}} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Noemen wij  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  de traagheidsmomenten van het slingerlichaam om de assen der  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , en  $p$ ,  $q$ ,  $r$  de ontbondenen van zijne oogenblikkelijke draaiingssnelheid volgens de richtingen die de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ -assen gelijktijdig hebben, zoo is de levende kracht  $T_p$  van de beweging van het slingerlichaam, volgens bekende eigenschappen,

$$\frac{1}{2} (Pp^2 + Qq^2 + Rr^2) = T_p \dots \dots \dots (12)$$

Om de  $p$ ,  $q$ ,  $r$  uit te drukken in  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\frac{d\mu}{dt}$  en  $\frac{d\nu}{dt}$ , merke men op, dat

$$\left. \begin{aligned} p &= \alpha_1' \pi + \beta_1' \chi + \gamma_1' \rho, \\ q &= \alpha_2' \pi + \beta_2' \chi + \gamma_2' \rho, \\ r &= \alpha_3' \pi + \beta_3' \chi + \gamma_3' \rho, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

is, wanneer  $\pi$ ,  $\chi$ ,  $\rho$  de componenten van de draaiingssnelheid volgens de oogenblikkelijke richtingen van de assen der  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$  zijn, en deze worden bepaald door

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{dt}, \\ \chi &= \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt}, \\ \rho &= \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

zoodat

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \text{Cos } m_2 \text{ Cos } \nu \frac{d\mu}{dt}, \\ \chi &= \frac{d\nu}{dt} - \text{Sin } m_2 \frac{d\mu}{dt}, \\ \rho &= \text{Cos } m_2 \text{ Sin } \nu \frac{d\mu}{dt}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

en als men nog het symbool

$$a_{\alpha\beta} = P\alpha_1'\beta_1' + Q\alpha_2'\beta_2' + R\alpha_3'\beta_3'$$

en  $a_{\alpha\alpha}$ ,  $a_{\beta\beta}$ ,  $a_{\gamma\gamma}$ ,  $a_{\alpha\gamma}$ ,  $a_{\beta\gamma}$  met analoge beteekenis invoert, wordt

$$T_p = \frac{1}{2} \{ a_{\alpha\alpha} \pi^2 + a_{\beta\beta} \chi^2 + a_{\gamma\gamma} \rho^2 + 2a_{\alpha\beta} \pi \chi + 2a_{\alpha\gamma} \pi \rho + 2a_{\beta\gamma} \chi \rho \}. \quad (17)$$

De levende kracht van den drager  $T_i$ , hangt alleen af van  $\frac{d\mu}{dt}$ ;

wij stellen 
$$T_i = \frac{1}{2} W \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 \dots \dots \dots (18)$$

De levende kracht van den geheelen toestel wordt dan (15, 17, 18)

$$T = T_p + T_i = A^{\mu\mu} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 + A^{\nu\nu} \left( \frac{d\nu}{dt} \right)^2 + A^{\mu\nu} \frac{d\mu}{dt} \frac{d\nu}{dt}. \quad (19)$$

waar

$$\left. \begin{aligned} 2A^{\mu\mu} &= W + a_{\alpha\alpha} \cos^2 m_2 \cos^2 \nu + a_{\beta\beta} \sin^2 m_2 + a_{\gamma\gamma} \cos^2 m_2 \sin^2 \nu + \\ &\quad + 2a_{\alpha\gamma} \cos^2 m_2 \sin \nu \cos \nu - 2a_{\alpha\beta} \cos m_2 \sin m_2 \cos \nu - \\ &\quad - 2a_{\beta\gamma} \cos m_2 \sin m_2 \sin \nu \\ 2A^{\nu\nu} &= a_{\beta\beta} \\ 2A^{\mu\nu} &= -2a_{\beta\beta} \sin m_2 + 2a_{\alpha\beta} \cos m_2 \cos \nu + 2a_{\alpha\gamma} \cos m_2 \sin \nu. \end{aligned} \right\} (20)$$

Neemt men aan, dat het zwaartepunt van den drager slechts om eene kleine grootheid van de eerste orde afwijkt van het ophangpunt van den slinger, en dat zijne massa ten opzichte van de massa van den laatste eveneens van de eerste orde klein is, met dien verstande, dat eene kleine grootheid van de tweede orde niet meer waargenomen kan worden, zoo zal de verticaal in het zwaartepunt van het slingerlichaam alleen slechts onmerkbaar weinig van de  $z_0$ -as afwijken, in allen gevallen laat de krachtfunctie der op den slinger werkende krachten zich dan zeer eenvoudig uitdrukken door de  $x_0 y_0$  coördinaten van een punt, waarvoor deze in den evenwichtsstand nul zijn. Eindelijk zijn het juist deze grootheden, die waargenomen worden, daar men de afwijkingen van de kruisdraden uit den evenwichtsstand in den kijker nagaat, en wij zullen ze dus in  $\mu$  en  $\nu$  uitdrukken. In den evenwichtsstand zij dus

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1;$$

dit punt heeft in het  $x_1, y_1, z_1$ -stelsel, wanneer de slinger zich in den evenwichtsstand bevindt, en dus voortdurend in het  $x_3, y_3, z_3$ -stelsel, volgens (4, 5, 8) de coördinaten

$$x_3 = \alpha_3'' \cos m_2 + \beta_3'' \sin m_2,$$

$$y_3 = \beta_3'' \cos m_2 - \alpha_3'' \sin m_2,$$

$$z_3 = \gamma_3''$$

Hieruit vindt men die in het  $x', y', z'$ -stelsel en ten slotte die in het  $x_0, y_0, z_0$ -stelsel van hetzelfde punt (met 6 en 8) bij andere waarden van  $\mu$  en  $\nu$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\alpha_1 \alpha_1'' + \beta_1 \beta_1'' + \gamma_1 \gamma_1'')(\alpha_3'' \cos m_1 + \beta_3'' \sin m_1) + \\ &\quad + (\alpha_2 \alpha_1'' + \beta_2 \beta_1'' + \gamma_2 \gamma_1'')(\beta_3'' \cos m_2 - \alpha_3'' \sin m_2) + \\ &\quad + (\alpha_1 \alpha_1'' + \beta_3 \beta_1'' + \gamma_3 \gamma_1'')\gamma_3'', \\ \eta &= (\alpha_1 \alpha_2'' + \beta_1 \beta_2'' + \gamma_1 \gamma_2'')(\alpha_3'' \cos m_2 + \beta_3'' \sin m_2) + \\ &\quad + (\alpha_2 \alpha_2'' + \beta_2 \beta_2'' + \gamma_2 \gamma_2'')(\beta_3'' \cos m_2 - \alpha_3'' \sin m_2) + \\ &\quad + (\alpha_3 \alpha_2'' + \beta_3 \beta_2'' + \gamma_3 \gamma_2'')\gamma_3''. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Uit deze vergelijkingen (21) kan men  $\mu$  en  $\nu$  vinden uitgedrukt in  $\xi$  en  $\eta$ ; en wanneer men deze uitdrukkingen in  $T$  (19) invoert neemt deze den vorm

$$T = A^{\xi\xi} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + A^{\eta\eta} \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + A^{\xi\eta} \left(\frac{d\xi}{dt}\right) \left(\frac{d\eta}{dt}\right) \dots \quad (22)$$

aan. Stelt men zich  $A^{\xi\xi}$ ,  $A^{\eta\eta}$ ,  $A^{\xi\eta}$  voor als ontwikkeld volgens de machten van  $\xi$  en  $\eta$ , zoo zal men stellen kunnen:

$$A^{\xi\xi} = A_0^{\xi\xi} + A_{\xi}^{\xi\xi} \xi + A_{\eta}^{\xi\xi} \eta + A_{\xi\xi}^{\xi\xi} \xi^2 + A_{\xi\eta}^{\xi\xi} \xi \eta + A_{\eta\eta}^{\xi\xi} \eta^2 + \dots \quad (23)$$

en even zulke vormen kan men aan  $A^{\eta\eta}$  en  $A^{\xi\eta}$  geven. Dan willen wij nieuwe coördinaten invoeren,  $\phi$  en  $\theta$ , zoodat

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \theta \cos \psi_D + \phi \sin \psi_D, \\ \xi &= \phi \cos \psi_D - \theta \sin \psi_D, \end{aligned} \right\} \dots \quad (24)$$

is, en die ten opzichte van de krachtfunctie en de waarneming dezelfde voordeelen hebben (zie onmiddellijk bij 20) als de  $\xi$ ,  $\eta$ , en verder  $\psi_D$  zoo kiezen, dat bij oneindig kleine amplituden de levende kracht, die in 't algemeen den vorm

$$T = \frac{1}{2} A \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} B \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + C \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \dots \quad (25)$$

heeft, den vorm

$$T = \frac{1}{2} A_0 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} B_0 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

aanneemt. Dan is

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} A &= A^{\xi\xi} \cos^2 \psi_D + A^{\eta\eta} \sin^2 \psi_D + A^{\xi\eta} \sin \psi_D \cos \psi_D, \\ \frac{1}{2} B &= A^{\xi\xi} \sin^2 \psi_D + A^{\eta\eta} \cos^2 \psi_D - A^{\xi\eta} \sin \psi_D \cos \psi_D, \\ C &= 2(-A^{\xi\xi} + A^{\eta\eta}) \sin \psi_D \cos \psi_D + A^{\xi\eta} (\cos^2 \psi_D - \sin^2 \psi_D), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  zijn functiën van  $\phi$  en  $\theta$ , die men volgens machten van deze veranderlijken ontwikkeld, als

$$A = A_0 + A_q \phi + A_\theta \theta + A_{\phi^2} \phi^2 + A_{\phi\theta} \phi\theta + A_{\theta^2} \theta^2 + \dots \quad (27^b)$$

voorstellen kan. Even zulke vormen kan men voor  $B$  en  $C$  nemen, maar dan is  $C_0 = 0$ .

Zullen  $\phi$  en  $\theta$  deze eigenschap hebben van  $C_0 = 0$  te maken, dan moet

$$Tg^2 \psi_D = \frac{A_0 \xi \eta}{A_0 \xi \xi - A_0 \eta \eta} \dots \dots \dots (27)$$

zijn. Den expliciten vorm van deze verschillende coëfficiënten en hulpgrootheden zullen wij eerst later geven, wanneer wij uit den vorm van de karakteristieke functie voor de beweging van den slinger de nauwkeurigheid afgeleid hebben, welke bij hunne berekening in acht genomen moet worden.

Stelt men 
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = p_2 \dots \dots \dots (28)$$

waar  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$  en  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  is, en noemt men de krachtfunctie van de algemeene aantrekkingskracht op onzen slinger  $U$ , en denkt men zich de aarde een oogenblik in rust, zoo zou volgens (13) van Hoofdstuk I van 't 1<sup>e</sup> Stuk de karakteristieke functie  $E$  voor de beweging van onzen slinger zijn

$$E = \left[ -T + U + p_1 \frac{d\phi}{dt} + p_2 \frac{d\theta}{dt} \right]_{, ,}$$

waar  $[ ]_{, ,}$  beteekent, dat  $E$  in  $p_1, p_2, \phi$  en  $\theta$  moet worden uitgedrukt. Dus volgen ((27) 1<sup>e</sup> Stuk Hoofdstuk I) en (25)

$$E = T - U = \frac{1}{2} \left[ \frac{B}{AB - C^2} p_1^2 + \frac{A}{AB - C^2} p_2^2 - 2 \frac{C}{AB - C^2} p_1 p_2 \right] - U \quad (29)$$

Zijn de ontbondenen van de draaiingssnelheid der aarde volgens de hoofdtraagheidsassen van den slinger in hunne oogenblikkelijke ligging en volgens de scherpe kant van het vaste mes  $\tilde{\omega}_u, \tilde{\omega}_v, \tilde{\omega}_{uv}$  en  $\tilde{\omega}_{x'}$ , de versnelling van het ophangpunt in zijne beweging met de aarde  $\Omega$ , de hoek tussehen deze en de verbindingslijn van ophangpunt en zwaartepunt  $f$ , het product van de massa van het slingerlichaam en den afstand van het zwaartepunt tot het ophangpunt  $\frac{M}{g}$ , waar  $g$  de versnelling van de zwaartekracht is, en

$$K = - \frac{M}{g} \text{Cos } f \Omega \dots \dots \dots (30)$$

$$L = Pp \tilde{\omega}_u + Qq \tilde{\omega}_v + Rr \tilde{\omega}_{uv} + W \tilde{\omega}_{x'} \frac{d\mu}{dt} \dots \dots \dots (31)$$

$$2G = P \tilde{\omega}_u^2 + Q \tilde{\omega}_v^2 + R \tilde{\omega}_{uv}^2 \dots \dots \dots (32)$$

zoo is volgens de theorie der betrekkelijke beweging (1<sup>e</sup> Stuk Hoofdstuk II, '63) de karakteristieke functie van den slinger op de draaiende aarde

$$H = E - K - L_{p'} - G + \frac{1}{2(AB - C^2)} \left\{ B \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 + A \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 - 2C \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right\},$$

waar  $L_{p'}$  uit  $L$  ontstaat wanneer men voor  $\frac{d\phi}{dt}$  en  $\frac{d\theta}{dt}$  hunne uitdrukkingen in  $p_1$  en  $p_2$ , die voor de ongestoorde beweging ( $E$ ) gelden, schrijft, of

$$H = \frac{1}{2} \left[ \frac{B}{AB - C^2} p_1^2 + \frac{A}{AB - C^2} p_2^2 - 2 \frac{C}{AB - C^2} p_1 p_2 \right] - U - K - L_{p'} - G + \frac{1}{2(AB - C^2)} \left\{ B \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 + A \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 - 2C \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right\} \quad (33)$$

en de krachtfunctie der zwaartekracht voor den slinger in een bepaalden stand in rust gedacht

$$U^* = U + K + G \dots \dots \dots (34)$$

De bewegingen bepaald door  $H$  volgens (33) kunnen wij niet algemeen, maar slechts door ontwikkeling in reeksen tot een willekeurigen graad van nauwkeurigheid aangeven. In dit geheele onderzoek, hetwelk ten doel heeft de bewegingen van den slinger met de nauwkeurigheid aan te geven, die in de waarneming bereikt kan worden, is de orde van de voorkomende kleine grootheden van het meeste belang. Wij zullen de draaiingssnelheid der aarde steeds als eene kleine grootheid van de tweede orde beschouwen. Deze is ongeveer  $\frac{1}{100000}$ , van de eerste orde is dus eene grootheid die van  $\frac{1}{10000}$  slechts door een kleinen factor verschilt. Herinneren wij ons nu het eenvoudige theoretische geval, dat in § 4 van Hoofdst. III van 't 1<sup>e</sup> Stuk besproken werd, waarbij aangenomen wordt, dat de traagheidsassen met de messen en deze in den evenwichtsstand met de  $x_0$  en  $y_0$ -assen van dit Hoofdstuk samenvallen. Daarbij kwamen veranderingen in den vorm en de ligging der slingeringsfiguren voor, die met eene snelheid van de orde der draaiingssnelheid van de aarde plaats vinden; gedurende een tijd (den duur van de daar geschetste proef), die van de tweede orde groot is (b. v. 10000") worden deze veranderingen eindig; nemen wij bijvoorbeeld aan, dat het verschil tusschen de ligging van de groote as der slingeringskrommen, die op de in rust

gedachte aarde zich vertoonen zou, en die zich werkelijk vertoont, aan het einde van een proef  $180^\circ$  is, wat zeer veel is. Het tienduizendste deel hiervan ontsnapt aan de waarneming, want de nauwkeurigheid van de bepaling der hoeken is hoogstens  $4'$ . De nauwkeurigheid van de bepaling der assenverhouding in de slingerellips met den oculairmicrometer blijft in 't gunstigste geval beneden  $\frac{1}{500}$ ; een verschil van de assenverhouding aan 't einde van de proef in de gestoorde en ongestoorde beweging van 1, — zoodat bijv. cirkels in plaats van rechte lijnen optreden, of positieve ellipsen met  $Tg \chi = \frac{1}{2}$  in plaats van negatieve ellipsen met  $Tg \chi = \frac{1}{2}$ , — moet even als het te voren aangenomen verschil in azimuth als zeer groot worden beschouwd; en het is dus duidelijk, dat ook in zijne uitwerking op den vorm der ellipsen een deel van de geheele storende werking, dat van de tweede orde klein is, aan de waarneming ontsnapt, terwijl een deel van de eerste orde klein, bv.  $\frac{1}{50}$ , zeer goed waar te nemen is. Men kan dus met het oog op onze proeven en de gegeven definitie van eene kleine grootheid van de tweede orde, deze als oneindig klein beschouwen.

De amplitude der slingeringen werd door mij van de eerste orde klein genomen, omdat bij kleinere amplituden toevallige schuddingen en trillingen van den toestel, die ik niet kon voorkomen noch in rekening brengen, op de verschijnselen een merkbaaren invloed konden uitoefenen.

Wij ontwikkelen nu

$$U' = U'_0 + U'_\varphi \phi + U'_{\theta^2} \theta^2 + U'_{\varphi^2} \phi^2 + U'_{\varphi\theta} \phi\theta + U'_{\theta^4} \theta^4 + U'_{\varphi^4} \phi^4 + U'_{\varphi^2\theta^2} \phi^2\theta^2 + U'_{\theta^4} \theta^4 + U'_R \dots \dots \dots (35)$$

$$G = G_0 + G_\phi \phi + G_{\theta^2} \theta^2 + G_{\varphi^2} \phi^2 + G_{\varphi\theta} \phi\theta + G_{\theta^4} \theta^4 + G_R \dots \dots (36)$$

$$L = L_0^\varphi \dot{\phi} + L_0^\theta \dot{\theta} + L_\varphi^\theta \phi \dot{\theta} + L_\theta^\varphi \theta \dot{\phi} + L_\varphi^\varphi \phi \dot{\phi} + L_\theta^\theta \theta \dot{\theta} + L_R \dots \dots (37)$$

volgens machten van  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\phi}$  en  $\dot{\theta}$ , en ontbinden de karakteristieke functie  $H$  (zie 33) in een hoofdlid van de tweede en een storingsfunctie van hoogere orde. De coëfficiënten in  $L$ ,  $L_0^\varphi$ ,  $L_0^\theta$  enz. zijn standvastigen van de tweede orde (zie 31), die van  $G$  van de vierde orde. Het is echter niet doelmatig de karakteristieke functie zoo in een hoofdlid en eene storingsfunctie te ontbinden, dat in de laatste de grootheden  $L_0^\varphi \dot{\phi}$ ,  $L_0^\theta \dot{\theta}$ ,  $G_\varphi \phi$ ,  $G_\theta \theta$  als storende termen voorkomen, omdat deze ten opzichte van de amplituden alleen van de eerste orde zijn. Ten gevolge van de bijzondere keuze van de  $z_0$ -as zijn

$U'_{\varphi}$  en  $U'_{\theta}$  beide nul; verder bevat  $U'_R$  slechts grootheden van de zesde orde, waarin minstens de tweede macht van de amplituden  $\phi$  en  $\theta$  voorkomt, en zulke grootheden van de vijfde orde, die ten opzichte van de amplituden van de derde orde zijn; terwijl de coëfficiënten  $U'_{\varphi\theta}$  en  $U'_{\varphi^2} - U'_{\theta^2}$  standvastige grootheden van de tweede orde zijn. Want afgezien van grootheden, die de tweede macht van de draaiingssnelheid der aarde bevatten en ten opzichte van de amplituden van  $\phi$  en  $\theta$  van hoogere orde dan de eerste zijn, zou de krachtfunctie van het slingerlichaam

$$U'_S = M \sqrt{1 - \phi^2 - \theta^2} \dots \dots \dots (35^b)$$

zijn, wanneer het zwaartepunt van den drager in de scherpe kant van het vaste mes viel.

Immers wanneer wij voor een oogenblik als  $z$ -as van een rechthoekig coördinatenstelsel de naar beneden gerichte verticaal van het ophangpunt, dit zelf als oorsprong en het verticaalvlak van het vaste mes als  $xz$ -vlak kiezen, verder de zwaartekracht als onveranderlijk in richting en grootte aannemen en  $z_M$ ,  $x_M$ ,  $y_M$  de coördinaten van een punt noemen, voor hetwelk in den evenwichtsstand van den slinger  $z_M = 1$ ,  $x_M = 0$ ,  $y_M = 0$  is, zou de krachtfunctie van de zwaartekracht  $Mz_M$  zijn, of

$$Mz_M = M \sqrt{1 - x_M^2 - y_M^2}.$$

Wij kunnen dit ontwikkelen volgens evene opklimmende machten van  $x_M$  en  $y_M$

$$Mz_M = M \left( 1 - \frac{x_M^2}{2} - \frac{y_M^2}{2} - \frac{x_M^4}{8} - \frac{y_M^4}{8} - \frac{x_M^2 y_M^2}{4} + \dots \right).$$

Proefondervindelijk is het echter gebleken, dat de zwaartekracht niet onveranderlijk in richting en grootte is, maar dat zij bij verplaatsing van haar aangrijppingspunt verandert om eene grootheid van de tweede orde ten opzichte van de draaiingssnelheid der aarde. Daardoor komen bij de ontwikkeling van de krachtfunctie in eene reeks in 't algemeen termen van dezen vorm

$$a_0 + ax_M + by_M + cx_M^2 + dy_M^2 + ex_M y_M + fx_M^3 + \text{enz.} \dots (35^c)$$

waar echter de standvastige coëfficiënten  $a_0$ ,  $a$ ,  $b$  enz. van de tweede orde ten opzichte van de draaiingssnelheid der aarde, dus volgens onze definitie van de vierde orde zijn. Uit dezen vorm van de krachtfunctie

$$U' = M + a_0 + ax_M + by_M + x_M^2 \left(-\frac{1}{2}M + c\right) + y_M^2 \left(-\frac{1}{2}M + d\right) + x_M y_M e + \dots (35^d)$$

volgt, wegens

$$\frac{\partial U'}{\partial x} = a + x_M(-M + 2c) + y_M e + \dots,$$

$$\frac{\partial U'}{\partial y} = b + y_M(-M + 2d) + x_M e + \dots,$$

dat de slinger zich in 't algemeen niet meer in evenwicht bevindt, wanneer  $x_M$  en  $y_M$  nul zijn, zoodat de verbindingslijn van zwaartepunt en ophangpunt in de verticaal van het laatste valt, maar wanneer

$$x_M = a + 2c x_M + y_M e + \dots$$

$$y_M = b + 2d y_M + x_M e + \dots$$

of in eerste benadering  $x_M = a$ ,  $y_M = b$  is. De verbindingslijn van zwaartepunt en ophangpunt in den evenwichtsstand wijkt dus om eene grootheid van de vierde orde af van de verticaal van het ophangpunt. Namen wij voor de richting van de  $z$ -as oorspronkelijk die van de verticaal op de plaats van het zwaartepunt van den slinger, zoo zouden wij op dezelfde wijze tot de slotsom komen, dat de verbindingslijn van het ophangpunt en het zwaartepunt ook van deze om eene grootheid van de vierde orde afwijkt. Herinneren wij ons nu, dat het  $x_0, y_0, z_0$ -stelsel zoo aangenomen werd, dat de  $z_0$ -as in die verbindingslijn valt, zoodat dit stelsel slechts om grootheden van de vierde orde van het hier ingevoerde verschilt, zoo kan men  $x_M$  en  $y_M$  als functie van  $\xi$  en  $\eta$  in dergelijke reeksen als (35<sup>c</sup>) ontwikkelen, waar de standvastigen  $a_0, a, b \dots$  van de vierde orde zijn; en deze in (35<sup>d</sup>) invoerende zien wij, dat men in plaats van de  $x_M$  en  $y_M$  in de krachtfunctie  $U'$  overal  $\xi + a$  en  $\eta + b$  mag schrijven zonder fouten van lagere orde dan de achtste te maken; dan wordt

$$U' = M \left( 1 - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} - \frac{\xi^4}{8} - \frac{\eta^4}{8} - \frac{\xi^2 \eta^2}{4} + \dots \right) + c' \xi^2 + d' \eta^2 + e' \xi \eta + \dots, \dots \dots \dots (35^e)$$

waar  $c', d, e'$  enz. allen van de vierde of hoogere orde zijn. Hiermede en met (24) is bewezen, dat bij deze onderstelling over den drager in (35<sup>b</sup>) slechts grootheden verwaarloosd zijn, die in 't geheel van de zesde en ten opzichte van de amplitude van de tweede orde zijn.

Wanneer men nu in aanmerking neemt, dat het draaiingsmoment van den drager niet nul maar klein van de tweede orde is, zal men de krachtfunctie van den drager  $U'_D$  in 't algemeen in eene reeks

van denzelfden vorm als (35<sup>c</sup>) kunnen ontwikkelen en met  $U'_s$  samenvatten tot

$$U' = U'_s + U'_D,$$

eene reeks van denzelfden vorm als (35<sup>d</sup>), waar echter de kleine standvastigen  $a, b, \dots$  van de tweede orde zijn. Daaruit volgt weder eene afwijking van het  $x_0, y_0, z_0$ -stelsel van het zoo even aangenomen  $x, y, z$ -stelsel, in dier voege, dat nu kleine grootheden van de tweede orde de afwijking van de  $z_0$ -as van dit  $x, y, z$ -stelsel bepalen; en dat men in de reeksen

$$x_M = \xi + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi^2 + a_4 \xi \eta + a_5 \eta^2 + \dots$$

$$y_M = \eta + b_1 \xi + b_2 \eta + b_3 \xi^2 + b_4 \xi \eta + b_5 \eta^2 + \dots$$

nu voor  $a_1, \dots, b_1$  enz., grootheden van de tweede orde heeft. In (35<sup>d</sup>) gesubstitueerd, geven deze weder (35<sup>c</sup>), maar nu met  $c'$  enz., van de tweede orde; en hiermede is onze bewering omtrent  $U'_R, U'_{\varphi\theta}$  en  $U'_{\varphi_2} - U'_{\theta_2}$  bewezen.

Grootheden in  $H$  (zie 33), die van de vijfde orde, dus ten opzichte van het hoofdlid van de derde orde zijn, zullen de veranderingen van  $\phi$  en  $\theta$  tengevolge van het laatste alleen in 't algemeen om grootheden wijzigen, die ten hunnen opzichte eveneens van de derde orde klein zijn. Maar in een tijdsverloop, dat van de tweede orde groot is, zullen die wijzigingen zich kunnen samenvoegen tot eene grootheid van de eerste orde ten opzichte van de veranderingen, die  $\phi$  en  $\theta$  door het hoofdlid ondergaan. Dus kunnen grootheden in  $H$ , die van de vijfde orde klein zijn, nog een merkbaaren invloed op de verschijnselen uitoefenen; en moeten wij deze in de ontwikkeling van  $H$  nog opnemen. Maar wanneer men dezelfde redeneering op de grootheden toepast, die van de zesde orde klein zijn, en zich herinnert, dat wij grootheden van de tweede orde als oneindig klein mochten beschouwen; ziet men terstond in, dat deze geen merkbaaren invloed op de bewegingen van den slinger kunnen uitoefenen en dus verwaarloosd mogen worden.

Voor de karakteristieke functie  $H$  komt dus (37 vlg.)

$$H = \frac{Bp_1^2 + Ap_2^2 - 2Cp_1p_2}{2(AB - C^2)} - U'_0 + \frac{M'}{2} \phi^2 + \frac{M'}{2} \theta^2 + \frac{M}{8} (\phi^2 + \theta^2)^2 + \left. \begin{aligned} & - U'_{\varphi\theta} \phi \theta + \frac{1}{2(AB - C^2)} \left\{ B \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 + A \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 - 2C \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right\} - \\ & - L_0^\varphi \dot{\phi} - L_0^\theta \dot{\theta} - L_\varphi^\theta \phi \dot{\theta} - L_\theta^\varphi \theta \dot{\phi} - L_\varphi^\varphi \phi \dot{\phi} - L_\theta^\theta \theta \dot{\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

waar het verschil van  $M$ ,  $M''$  en  $M'$  eene kleine grootheid van de tweede orde is, en in  $L$  volgens Hoofdstuk I van 't 1<sup>ste</sup> Stuk in plaats van  $\dot{\phi}$  en  $\dot{\theta}$  nog hunne uitdrukkingen in  $p_1$  en  $p_2$ , die voor de ongestoorde beweging zouden gelden, geschreven moeten worden; dit zijn

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{Bp_1 - Cp_2}{AB - C^2} \quad \text{en} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Ap_2 - Cp_1}{AB - C^2} \dots \dots \dots (38^b)$$

Dan wordt wegens

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} &= L'_\phi + L''_\phi \phi + L'''_\phi \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= L'_\theta + L''_\theta \phi + L'''_\theta \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

hetgeen tot op eerste machten nauwkeurig is,

$$\begin{aligned} H = & \frac{Bp_1^2 + Ap_2^2 - 2Cp_1p_2}{2(AB - C^2)} + \frac{M''}{2} \phi^2 + \frac{M'}{2} \theta^2 - U_{\phi\theta} \phi\theta + \frac{M}{8} (\phi^2 + \theta^2)^2 - \\ & \text{—standvastige—} \frac{L'_\phi(Bp_1 - Cp_2) + L'_\theta(Ap_2 - Cp_1)}{AB - C^2} + \\ & + \frac{[L''_\phi(Ap_2 - Cp_1)L''_\phi(Bp_1 - Cp_2)]\phi - [L''_\theta(Ap_2 - Cp_1) + L''_\theta(Bp_1 - Cp_2)]\theta}{AB - C^2} + \\ & + \frac{B(L'_\phi + L''_\phi \phi + L'''_\phi \theta)^2 + A(L'_\theta + L''_\theta \phi + L'''_\theta \theta)}{2(AB - C^2)} - \\ & - \frac{C(L'_\phi + L''_\phi \phi + L'''_\phi \theta)(L'_\theta + L''_\theta \phi + L'''_\theta \theta)}{(AB - C^2)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Wij ontbinden dus de karakteristieke functie  $H$  in

$$H = E + S \dots \dots \dots (41)$$

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} \frac{B_0p_1^2 + A_0p_2^2 - 2C_0p_1p_2}{A_0B_0 - C_0^2} + \frac{M''}{2} \phi^2 + \frac{M'}{2} \theta^2 - \text{standvastige—} \\ & - \frac{[L'_\phi(B_0p_1 - C_0p_2) + L'_\theta(A_0p_2 - C_0p_1)]}{A_0B_0 - C_0^2} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{A_0L_0^{\theta^2} + B_0L_0^{\phi^2} - 2C_0L_0^\phi L_0^\theta}{A_0B_0 - C_0^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2} \left( \frac{Bp_1^2 + Ap_2^2 - 2Cp_1p_2}{AB - C^2} - \frac{B_0p_1^2 + A_0p_2^2 - 2C_0p_1p_2}{A_0B_0 - C_0^2} \right) - U_R - \\
 & - U'_\varphi \vartheta \phi \theta + \frac{M}{8} (\phi^2 + \theta^2)^2 - L_0^\varphi \left( \frac{Bp_1 - Cp_2}{AB - C^2} - \frac{B_0p_1 - C_0p_2}{A_0B_0 - C_0^2} \right) - \\
 & - L_0^\theta \left( \frac{Ap_2 - Cp_1}{AB - C^2} - \frac{A_0p_2 - C_0p_1}{A_0B_0 - C_0^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \frac{AL_0^{\theta^2} + BL_0^{\varphi^2} - 2CL_0^\varphi L_0^\theta}{AB - C^2} - \frac{A_0L_0^{\theta^2} + B_0L_0^{\varphi^2} - 2C_0L_0^\varphi L_0^\theta}{A_0B_0 - C_0^2} \right] - \\
 & - \phi \left[ L_\varphi^\theta \frac{A(p_2 - L_0^\theta) - C(p_1 - L_0^\varphi)}{AB - C^2} + L_\varphi^\varphi \frac{B(p_1 - L_0^\varphi) - C(p_2 - L_0^\theta)}{AB - C^2} \right] - \\
 & - \theta \left[ L_\theta^\varphi \frac{A(p_1 - L_0^\varphi) - C(p_2 - L_0^\theta)}{AB - C^2} + L_\theta^\theta \frac{B(p_1 - L_0^\varphi) - C(p_2 - L_0^\theta)}{AB - C^2} \right].
 \end{aligned} \tag{43}$$

Om nu de bewegingen van den slinger te vinden, moeten wij beginnen met eene volledige oplossing te zoeken van de gedeeltelijke differentiaalvergelijking, waarin  $E'$  door

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial \theta} \dots \dots \dots (44)$$

overgaat. Wanneer wij echter

$$\text{en } \left. \begin{aligned}
 W &= W' + L_0^\varphi \phi + L_0^\theta \theta, \\
 p_1' &= \frac{\partial W'}{\partial \phi}, \quad p_2' = \frac{\partial W'}{\partial \theta},
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

stellen en de willekeurige standvastige in  $E'$  met  $h$  aanduiden, wordt zij, daar  $C_0 = 0$  is, tot

$$\frac{p_1'^2}{2A_0} + \frac{p_2'^2}{2B_0} + \frac{M'}{2} \phi^2 + \frac{M'}{2} \theta^2 = h; \dots \dots \dots (46)$$

waaruit de oplossing  $W'$  met eene nieuwe standvastige  $\alpha$  bepaald wordt, door

$$dW' = \sqrt{2B_0} \sqrt{\alpha - \frac{1}{2}M'\theta^2} d\theta + \sqrt{2A_0} \sqrt{h - \alpha - \frac{1}{2}M'\phi^2} d\phi,$$

en met  $\frac{\partial W'}{\partial \alpha} = -\beta, \quad \frac{\partial W'}{\partial h} = t - \tau,$

het reeds meermalen gebruikte stelsel van canonische integralen (zie § 1 van Hoofdstuk II van 't 1<sup>e</sup> Stuk)

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{2(\hbar - \alpha)}{M'}} \operatorname{Sin} p t, & \theta &= \sqrt{\frac{2\alpha}{M'}} \operatorname{Sin} q t', \\ t' &= t - \tau, & p &= \sqrt{\frac{M'}{A_0}}, & q &= \sqrt{\frac{M'}{B_0}}, & t' &= t - \tau - \beta, \end{aligned} \right\} (47^a)$$

$$p_1' = \sqrt{2A_0(\hbar - \alpha)}, \quad p_2' = \sqrt{2B_0\alpha} \dots (47^b)$$

zou volgen. Volgens (45) en omdat  $L_0^\varphi$  en  $L_0^\theta$  zuivere standvastigen zijn vindt men dus uit  $E'$ , als voren

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\beta, \quad \frac{\partial W}{\partial \hbar} = t - \tau$$

stellende, waardoor dan  $\beta$  en  $\tau$  weder de willekeurige standvastigen der canonische eindintegralen worden, weder hetzelfde stelsel van canonische eindintegralen als (47<sup>a</sup>). Maar in plaats van (47<sup>b</sup>) vinden wij

$$p_1 = p_1' + L_0^\varphi, \quad p_2 = p_2' + L_0^\theta, \dots (48)$$

waar  $p_1'$  en  $p_2'$  uit (47<sup>b</sup>) genomen moeten worden, voor het stelsel der intermediaire integralen. Voert men deze integralen (47<sup>a</sup> en 48) in de storingsfunctie in, zoo wordt zij tot

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{B p_1'^2 + A p_2'^2 - C p_1' p_2'}{A B - C} - \frac{p_1'^2}{A_0} - \frac{p_2'^2}{B_0} \right) + \frac{M}{8} (\phi^2 + \theta^2)^2 - U'_{\varphi\theta} \phi \theta - U_R' - \phi \left( L_\varphi^\theta \frac{p_2'}{B_0} + L_\varphi^\varphi \frac{p_1'}{A_0} \right) - \theta \left( L_\theta^\varphi \frac{p_2'}{B_0} + L_\theta^\theta \frac{p_1'}{A_0} \right) (49)$$

In het laatste gedeelte van  $S$  is in plaats van  $A, B, C$  eenvoudig  $A_0, B_0, C_0$  geschreven. Dat wij dit mogen doen volgt uit eene opmerking, die ons tevens de orde van de storingsfunctie leert kennen. Wanneer de hoeken  $m, m_2, m_3, \phi_0, \theta_0$  nul zijn komen in  $A, B, C$  behalve standvastigen alleen grootheden van de tweede en hogere orde ten opzichte van  $\phi$  en  $\theta$  voor, of wat hetzelfde is  $A_\varphi$  en  $A_\theta, B_\varphi$  en  $B_\theta, C_\varphi$  en  $C_\theta$  (zie 27<sup>b</sup>) zijn nul. Dan kunnen dus in  $S$  slechts grootheden van de vierde of hogere orde voorkomen. Het bewijs voor deze bewering leveren eerst de formules (74) die in verband met (24) aantonen, dat  $\phi$  en  $\theta$  slechts lineair in  $A, B, C$  op kunnen treden, wanneer  $A_\xi^\xi, A_\eta^\xi, A_\xi^\eta, A_\eta^\eta$  niet allen nul zijn; volgens (73) en (66<sup>b</sup>) zijn deze echter nul wanneer  $m_1, m_2, m_3, \phi_0$  en  $\theta_0$  nul zijn. Zoolang verder  $m_1, m_2, m_3, \phi_0$  en  $\theta_0$  van

de eerste orde klein zijn komen wel is waar grootheden, die ten opzichte van  $\phi$  en  $\theta$  alleen van de eerste orde zijn in  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (bijv.  $A_\varphi \phi$  in  $A$ ), dus grootheden, die ten opzichte van  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $p_1$  en  $p_2$  alleen van de derde orde klein zijn (bijv.  $\frac{A_\varphi \phi p_1' p_2'^2}{AB - C^2}$ ), in de storingsfunctie voor; maar zij bevatten tegelijkertijd een coëfficiënt ( $A_\varphi$  bijv.), die volgens (73) en (66<sup>b</sup>) van de orde van  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $\phi_0$ ,  $\theta_0$ , dus van de eerste orde klein is. In deze onderstelling over de waarde van  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $\phi_0$ ,  $\theta_0$ , die wij veilig maken kunnen wanneer ook geene bijzondere zorg aan het ophangen van den slinger is besteed, komen dus in  $A - A_0$ ,  $B - B_0$ ,  $C - C_0$  geene grootheden van lagere orde dan de tweede en in  $S$  geene grootheden van lagere orde dan de vierde voor. Daar verder in de ontwikkeling van  $A$ ,  $B$ ,  $C$  volgens machten van  $\phi$  en  $\theta$  de termen, die op  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  volgen, (zie 27<sup>b</sup>), zooals wij aantoonde, ten opzichte van de laatste van de tweede orde zijn en de twee laatste termen der storingsfunctie (die  $L_\varphi^\theta$  en  $L_\theta^\varphi$  bevatten), wanneer men van  $A$ ,  $B$ ,  $C$  alleen  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  in rekening brengt reeds van de vierde orde zijn, kan men in dit gedeelte van de storingsfunctie de verschillen  $A - A_0$ ,  $B - B_0$ ,  $C - C_0$ , als slechts grootheden van de zesde orde in  $S$  leverende, verwaarloozen. En wanneer men verder voor de quotienten der coëfficiënten in de ontwikkeling van  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (zie 27<sup>b</sup>)

$$\frac{A_\varphi}{A_0} = A'_\varphi, \quad \frac{B_\theta}{B_0} = B'_\theta, \quad \frac{C_\varphi}{A_0 B_0} = C'_\varphi, \dots \dots (49^b)$$

schrijft en onder  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $C_R$  grootheden van de derde orde ten opzichte van de amplituden samenvat, wordt

$$\begin{aligned} & \frac{B p_1'^2 + A p_2'^2 - 2 C p_1' p_2'}{2(AB - C^2)} - \frac{2 A_0}{p_1'^2} - \frac{2 B_0}{p_2'^2} = \\ & = -\frac{1}{2} \frac{p_1'^2}{A_0} \left\{ A'_\varphi \phi + A'_\theta \theta + A'_\varphi \phi^2 + A'_\varphi \theta \phi \theta + A'_\theta \theta^2 + A_R \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{p_2'^2}{B_0} \left\{ B'_\varphi \phi + B'_\theta \theta + B'_\varphi \phi^2 + B'_\theta \theta \phi \theta + B'_\theta \theta^2 + B_R \right\} + \\ & - p_1' p_2' \left\{ C'_\varphi \phi + C'_\theta \theta + C'_\varphi \phi^2 + C'_\theta \theta^2 + C'_\varphi \theta \phi \theta + C_R \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

§ 2. *Omvorming van de storingsfunctie.*

Op de storingsfunctie moet men de formules (94) van Hoofdstuk II van 't 1<sup>e</sup> Stuk

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \frac{d\beta}{dt}, & -\frac{\partial S}{\partial h} &= \frac{d\tau}{dt}, \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} &= \frac{d\alpha}{dt}, & \frac{\partial S}{\partial \tau} &= \frac{dh}{dt}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

toepassen om de differentiaalvergelijkingen voor de gestoorde elementen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $h$  te vinden; eerst echter moet men  $S$  in de elementen uitdrukken met behulp van de integralen der ongestoorde beweging (47<sup>a</sup> en 48); daar echter in  $S$  reeds overal  $p_1'$  en  $p_2'$  ingevoerd zijn, kan men de waarde van deze terstond aan (47<sup>b</sup>) ontleenen. Dan wordt

$$\begin{aligned} S = & -\frac{A_0}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \left\{ A'_{\varphi} \phi + A'_{\vartheta} \theta + A'_{\varphi^2} \phi^2 + A'_{\vartheta^2} \theta^2 + A'_{\varphi\vartheta} \phi\theta + A_R \right\} - \\ & -\frac{B_0}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left\{ B'_{\varphi} \phi + B'_{\vartheta} \theta + B'_{\varphi^2} \phi^2 + B'_{\vartheta^2} \theta^2 + B'_{\varphi\vartheta} \phi\theta + B_R \right\} - \\ & - A_0 B_0 \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \left\{ C'_{\varphi} \phi + C'_{\vartheta} \theta + C'_{\varphi^2} \phi^2 + C'_{\vartheta^2} \theta^2 + C'_{\varphi\vartheta} \phi\theta + C_R \right\} + \\ & + \frac{M}{8} (\phi^2 + \theta^2)^2 - U'_{\varphi\vartheta} \phi\theta - \\ & - L'_{\vartheta} \theta \frac{d\phi}{dt} - L'_{\varphi} \phi \frac{d\theta}{dt} + N', \end{aligned} \quad (53)$$

waar  $N'$  een aggregaat is van termen, die  $\phi \frac{d\phi}{dt}$  en  $\theta \frac{d\theta}{dt}$  met standvastige coëfficiënten van de tweede orde vermenigvuldigd bevatten en van termen, die in 't geheel van de vijfde orde zijn, ten opzichte van  $\phi$  en  $\theta$  alleen echter van de derde orde, als bijv.  $\theta^2 \frac{d\phi}{dt}$  en eenige termen uit  $U'_R$ .

Daar de storingsfunctie, volgens onze onderstelling over de grootte van  $m_1$ ,  $m$ ,  $m_3$ ,  $\phi_0$ ,  $\theta_0$  van de vierde orde is, kan er in hare behandeling eene vereenvoudiging worden aangebracht, ter wille waarvan wij juist deze onderstelling gemaakt hebben.  $\frac{d\alpha}{dt}$  en  $\frac{dh}{dt}$  zijn volgens (51) en (47<sup>a</sup>) van dezelfde orde als  $S$ , d. i. van de vierde,  $\alpha$  en  $h$  zelve van de tweede orde. Daarentegen zijn  $\frac{d\beta}{dt}$  en  $\frac{d\tau}{dt}$

volgens (51) en (47<sup>a</sup>) van de tweede orde, maar tevens  $\beta$  en  $\tau$  zelve van de orde nul, d. w. z. eindig. De verandering van de elementen of canonische standvastigen gedurende eene slingingering overeenkomende met het ongestoorde vraagstuk is dus steeds eene kleine grootheid van de tweede orde ten hunnen opzichte, die wij volgens eene vroegere opmerking oneindig klein mogen stellen. Deze verandering ontsnapt dus aan de waarneming, wanneer niet over een zeer groote reeks van slingeringen het teeken van een der differentiaalquotienten der elementen naar den tijd hetzelfde blijft. Voor de berekening van deze merkbaar wordende veranderingen der elementen kan men dus, zonder een grootere fout dan van de tweede orde ten opzichte van het beschouwde element te maken, bijv.

$$-\frac{d\beta}{dt} = \frac{p}{2\pi} \int_c^{\tau + \frac{2\pi}{p}} \frac{\partial S}{\partial \alpha} dt = \frac{p}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_c^{\tau + \frac{2\pi}{p}} S dt,$$

schrijven, waar onder het  $\int$  de elementen als standvastig mogen worden beschouwd en  $\frac{2\pi}{p}$  de periode van den in  $\phi$  optredenden sinus is. Bij een slinger, die niet al te zeer van den enkelvoudige afwijkt, zal  $p$  slechts weinig van  $q$  verschillen, en wij willen aannemen, dat  $p - q$ , dus met (47<sup>a</sup>) ook  $A_0 - B_0$  eene kleine grootheid van de tweede orde, d. i. van de orde van de draaiingsnelheid der aarde is; verder stellen wij

$$qt'' = pt' + T_0.$$

De invoering van

$$\text{Cos } qt'' = \text{Cos } pt' \text{ Cos } T_0 - \text{Sin } pt' \text{ Sin } T_0,$$

$$\text{Sin } qt'' = \text{Sin } pt' \text{ Cos } T_0 + \text{Cos } pt' \text{ Sin } T_0,$$

veroorlooft ook  $T_0$  voor het integraalteeken te brengen, zoodat in

$$\int_c^{\tau + \frac{2\pi}{p}} S dt,$$

slechts  $\text{Cos } pt'$  en  $\text{Sin } pt'$  onder het  $\int$  blijven. Daar deze integratie over de geheele periode van  $\text{Cos } pt'$  en  $\text{Sin } pt'$  uitgestrekt wordt, kan men terstond de termen, die volgens  $\phi$  en  $\theta$  van de derde of vijfde orde zijn weglaten, immers zij geven slechts zulke producten van de grootheden  $\text{Cos } pt'$  en  $\text{Sin } pt'$ , die over hunne geheele periode geïntegreerd nul worden.

Dus blijft slechts (53)

$$\begin{aligned}
 S = & -\frac{A_0}{2} \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \left\{ A'_{\varphi_2} \Phi + A'_{\varphi_2} \theta^2 + A'_{\varphi\theta} \Phi \theta \right\} - \\
 & -\frac{B_0}{2} \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \left\{ B'_{\varphi_2} \Phi^2 + B'_{\varphi_2} \theta^2 + B'_{\varphi\theta} \Phi \theta \right\} - \\
 & -A_0 B_0 \left( \frac{d\Phi}{dt} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \left\{ C'_{\varphi_2} \Phi + C'_{\varphi_2} \theta^2 + C'_{\varphi\theta} \Phi \theta \right\} - U'_{\varphi\theta} \Phi \theta + \\
 & + \frac{M}{8} (\Phi^2 + \theta^2)^2 - L'_{\varphi_2} \theta \frac{d\Phi}{dt} - L'_{\varphi} \Phi \frac{d\theta}{dt},
 \end{aligned} \quad (54)$$

in aanmerking te nemen. Merkt men verder op, dat

$$\frac{p}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau + \frac{2\pi}{p}} \cos^3 p t' \sin p t' dt' = 0, \quad \frac{p}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau + \frac{2\pi}{p}} \cos p t' \sin^3 p t' dt' = 0,$$

$$\frac{2\pi}{p} \int_{\tau}^{\tau + \frac{2\pi}{p}} \cos^2 p t' \sin^2 p t' dt' = \frac{1}{8},$$

$$\frac{p}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau + \frac{2\pi}{p}} \cos^4 p t' dt' = \frac{3}{8}, \quad \frac{p}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau + \frac{2\pi}{p}} \sin^4 p t' dt' = \frac{3}{8},$$

en dat in  $S$  gesteld mag worden:  $M'' = M' = M$ ;

zoo komt (zie 47<sup>a</sup>)

$$\begin{aligned}
 S = & -\frac{1}{4M} \left\{ A'_{\varphi_2} (h-\alpha)^2 + A'_{\varphi_2} (1 + 2 \sin^2 T_0) \alpha (h-\alpha) + \right. \\
 & \left. + A'_{\varphi\theta} (h-\alpha) \sqrt{\alpha(h-\alpha)} \cos T_0 \right\} - \\
 & -\frac{1}{4M} \left\{ B'_{\varphi} (1 + 2 \sin^2 T_0) (h-\alpha) \alpha + B'_{\varphi_2} \alpha^2 + \right. \\
 & \left. + B'_{\varphi\theta} \alpha \sqrt{\alpha(h-\alpha)} \cos T_0 \right\} - \\
 & -\frac{\sqrt{A_0 B_0}}{2M} \left\{ (C'_{\varphi_2} (h-\alpha) \sqrt{(h-\alpha)\alpha} + C'_{\varphi_2} \alpha \sqrt{(h-\alpha)\alpha}) \cos T_0 + \right. \\
 & \left. + C'_{\varphi\theta} \alpha (h-\alpha) \cos 2 T_0 \right\} + \\
 & + \frac{1}{2M} \left\{ \frac{3}{8} (h-\alpha)^2 + \frac{3}{8} \alpha^2 + \frac{1}{2} (1 + 2 \cos^2 T_0) \alpha (h-\alpha) \right\} + \\
 & + (L'_{\varphi} - L'_{\varphi_2}) \frac{\sqrt{\alpha(h-\alpha)}}{\sqrt{M} \sqrt{A_0}} \sin T_0 - U'_{\varphi\theta} \frac{\sqrt{\alpha(h-\alpha)}}{M} \cos T_0.
 \end{aligned} \quad (55)$$

Wij moeten nu de hierin voorkomende coëfficiënten explicite uitdrukken en denken daartoe de coëfficiënten  $A'_{\varphi_2}$ ,  $A'_{\varphi\theta}$  enz., die functien van de kleine grootheden van de eerste orde  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  zijn, volgens de opklimmende machten van deze ontwikkeld. Daar

die coëfficiënten volgens (54) slechts met grootheden van de vierde orde, bijv.  $\phi^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$  vermenigvuldigd in de storingsfunctie voorkomen, is het voldoende deze ontwikkeling tot op de eerste machten voort te zetten. Want die termen van deze ontwikkeling, welke hoogere machten van  $m_1, m_2, m_3$  bevatten, geven, daar zij slechts met grootheden van de 4<sup>e</sup> orde vermenigvuldigd in  $S$  voorkomen, daarin slechts grootheden van de 6<sup>e</sup> en hoogere orde, die men verwaarloozen mag. Maar de term, die afkomstig is van de eerste macht van  $m_1$  enz. in de ontwikkeling van  $A'_{\phi_2}$  enz. is slechts van de 5<sup>e</sup> orde en moet dus opgenomen worden. Eindelijk bevatten  $L_{\phi}^{\phi}$  en  $L_{\phi}^{\psi}$ , die eveneens functien van  $m_1, m_2, m_3$  zijn, als factor de draaiings-snelheid der aarde, die van de tweede orde is, en komen in  $S$  slechts met grootheden van de tweede orde vermenigvuldigd voor. Hunne ontwikkeling volgens  $m_1, m_2, m_3$  kan dus eveneens tot de eerste machten beperkt worden, daar slechts deze met eene grootheid van de 4<sup>e</sup> orde vermenigvuldigd van lagere dan de zesde orde zijn.

In de eerste plaats moet dus de levende kracht  $T$  tot op grootheden van de 4<sup>e</sup> orde in  $\mu$  en  $\nu$  en tot op grootheden van de eerste orde in  $m_1$  en  $m_3$  uitgedrukt worden. Daarbij schrijven wij nog voor (20)

$$\left. \begin{aligned} A^{\mu\mu} &= A_0^{\mu\mu} + A_1^{\mu\mu}\nu + A_2^{\mu\mu}\nu^2, \\ A^{\nu\nu} &= A_0^{\nu\nu}, \\ A^{\mu\nu} &= A_0^{\mu\nu} + A_1^{\mu\nu}\nu + A_2^{\mu\nu}\nu^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (56)$$

waar dus volgens (20)

$$\left. \begin{aligned} 2A_1^{\mu\mu} &= 2a_{\alpha\gamma} \cos^2 m_2 - 2a_{\beta\gamma} \cos m_2 \sin m_2, \\ 2A_2^{\mu\mu} &= -a_{\alpha\alpha} \cos^2 m_2 + a_{\gamma\gamma} \cos m_1 - a_{\alpha\beta} \cos m_2 \sin m_2, \\ 2A_1^{\mu\nu} &= 2a_{\gamma\beta} \cos m_2, \quad 2A_2^{\mu\nu} = -a_{\alpha\beta} \cos m_2. \end{aligned} \right\} (57)$$

Dan voeren wij de  $\xi$  en  $\eta$  in volgens (21). Zal de levende kracht tot op grootheden van de vierde orde in deze worden uitgedrukt, wat (53) eischt, zoo moet de uitdrukking van  $\frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$  in  $\frac{d\xi}{dt}$  en  $\frac{d\eta}{dt}$  in de coëfficiënten van de laatste tot op grootheden van de tweede orde volgens  $\xi$  en  $\eta$  nauwkeurig zijn; dus moeten de vergelijkingen tusschen  $\mu, \nu$  en  $\xi, \eta$  zoo worden opgelost, dat de uitdrukking van  $\mu$  en  $\nu$  in  $\xi$  en  $\eta$  tot op grootheden van de derde orde ten opzichte van deze nauwkeurig is.

Nu is volgens (9)

$$\begin{aligned} \alpha_1'' &= 1, & \alpha_2'' &= 0, & \alpha_3'' &= -m_1, \\ \beta_1'' &= 0, & \beta_2'' &= 1, & \beta_3'' &= m_3, \\ \gamma_1'' &= m_1, & \gamma_2'' &= -m_3, & \gamma_3'' &= 1. \end{aligned}$$

Verder wordt (7)

$$\alpha_1 = 1 - \frac{v^2}{2}, \quad \alpha_2 = -m_2, \quad \alpha_3 = v - \frac{v^3}{6}, \dots (59)$$

$$\beta_1 = m_2 \left( 1 - \frac{v^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} \right) + \mu v, \quad \beta_2 = 1 - \frac{\mu^2}{2},$$

$$\beta_3 = m_2 \left( v - \frac{v\mu^2}{2} - \frac{v^3}{6} \right) - \left( \mu - \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu^3}{6} \right),$$

$$\gamma_1 = m_2 \left( \mu - \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu^3}{6} \right) - \left( v - \frac{v\mu^2}{2} - \frac{v^3}{6} \right),$$

$$\gamma_2 = \mu - \frac{\mu^3}{6}, \quad \gamma_3 = 1 - \frac{\mu^2}{2} - \frac{v^2}{2} + m_2 \mu v;$$

dus (21) 
$$\xi = v - \frac{m_1}{2} \mu^2 - \frac{v^3}{6},$$

$$\eta = -\mu + m_2 v - m_1 \mu v + \frac{1}{2} m_3 v^2 + \frac{\mu^3}{6} - \frac{m_2}{6} v^3 + \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{m_2}{2} \mu^2 v. (60)$$

Eerste benadering  $\xi = v, \quad \eta = -\mu.$

Tweede benadering

$$\xi = v - \frac{m_1}{2} \eta^2,$$

$$\eta = -\mu + m_2 \xi + m_1 \xi \eta + \frac{1}{2} m_3 \xi^2,$$

$$v = \xi + \frac{m_1}{2} \eta^2,$$

$$\mu = -\eta + m_2 \xi + m_1 \xi \eta + \frac{1}{2} m_3 \xi^2.$$

Nu komt voor de derde benadering

$$\xi = v - \frac{m_1}{2} \eta^2 - \frac{1}{6} \xi^3,$$

$$\eta = -\mu + m_2 v + m_1 \xi \eta + \frac{1}{2} m_3 \xi^2 - \frac{\eta^3}{6} + \frac{m_2}{2} \eta^2 \xi - \frac{m_3}{6} \xi^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \xi^2 (-\eta + m_2 \xi) - \frac{m_3}{2} \eta \xi,$$

wier oplossing

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \xi + \frac{m_1}{2} \eta^2 + \frac{1}{6} \xi^3, \\ \mu &= m_2 \xi - \eta + \frac{m_3}{2} \xi^2 + m_1 \xi \eta + \frac{m_2}{2} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi^2 \eta - \frac{1}{6} \eta^3 \end{aligned} \right\} (61)$$

is; dus

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2\right) \frac{d\xi}{dt} + m_1 \eta \frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \left(m_2 + m_3 \xi + m_1 \eta + \frac{3}{2} m_2 \xi^2 - \eta \xi\right) \frac{d\xi}{dt} + \\ &\quad + \left(-1 + m_1 \xi - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{2} \eta^2\right) \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned} \right\} (62)$$

Nu wordt

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 &= (1 + \xi^2) \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2 m_1 \eta \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt}, \\ \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 &= -2 m_2 \eta \xi \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2 \left[-m_2 - m_3 \xi - m_1 \eta - 2 m_2 \xi^2 + \right. \\ &\quad \left. + \eta \xi - \frac{m_2}{2} \eta^2\right] \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} + [1 - 2 m_1 \xi + \xi^2 + \eta^2] \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2, \\ \left(\frac{d\mu}{dt}\right) \left(\frac{d\nu}{dt}\right) &= (m_2 + m_3 \xi + m_1 \eta + 2 m_2 \xi^2 - \xi \eta) \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - m_1 \eta \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \\ &\quad + [-1 - \xi^2 + m_1 \xi - \frac{1}{2} \eta^2] \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} \dots \dots \dots (63) \end{aligned}$$

Nu moeten noch  $A^{\mu\mu}$  en  $A^{\nu\nu}$  tot op grootheden van de tweede orde ten opzichte van de amplitude ontwikkeld worden.

Volgens (56) en (61)

$$\left. \begin{aligned} A^{\mu\mu} &= A_0^{\mu\mu} + A_1^{\mu\mu\nu} + A_2^{\mu\mu\nu^2} = A_0^{\mu\mu} + A_1^{\mu\mu} \left(\xi + \frac{m_1}{2} \eta^2\right) + A_2^{\mu\mu} \xi^2 \\ A^{\nu\nu} &= A_0^{\nu\nu} + A_1^{\nu\nu} \left[\xi + \frac{m_1}{2} \eta^2\right] + A_2^{\nu\nu} \xi^2. \end{aligned} \right\} (64)$$

Hierin is volgens (57)

$$\left. \begin{aligned} 2 A_1^{\mu\mu} &= 2 a_{\alpha\gamma} - 2 a_{\beta\gamma} m_2, \\ 2 A_2^{\mu\mu} &= -a_{\alpha\alpha} + a_{\gamma\gamma} - a_{\alpha\beta} m_2, \\ 2 A_1^{\mu\nu} &= 2 a_{\gamma\beta}, \\ 2 A_2^{\mu\nu} &= -a_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (65)$$

Wij voeren nu onze bij (53) gemaakte onderstelling, dat  $\phi_0$  en  $\theta_0$  klein van de eerste orde zijn, (vergelijk (11) en de opmerkin-

gen bij (34)) in, onderstellèn echter niets omtrent de waarde van  $\psi_0$ . Dan komt volgens (11) tot op grootheden van de eerste orde

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' &= \text{Cos } \psi_0, & \beta_1' &= \text{Sin } \psi_0, & \gamma_1' &= -\theta_0, \\ \alpha_2' &= -\text{Sin } \psi_0, & \beta_2' &= \text{Cos } \psi_0, & \gamma_2' &= \Phi_0, \\ \alpha_3' &= \theta_0 \text{Cos } \psi_0 + \Phi_0 \text{Sin } \psi_0, & \beta_3' &= -\Phi_0 \text{Cos } \psi_0 + \theta_0 \text{Sin } \psi_0, & \gamma_3' &= 1, \end{aligned} \right\} (66)$$

en volgens (16)

$$\left. \begin{aligned} a_{\alpha\alpha} &= P \text{Cos}^2 \psi_0 + Q \text{Sin}^2 \psi_0, \\ a_{\beta\beta} &= P \text{Sin}^2 \psi_0 + Q \text{Cos}^2 \psi_0, & a_{\gamma\gamma} &= R, \\ a_{\alpha\beta} &= (P - Q) \text{Sin } \psi_0 \text{Cos } \psi_0, \\ a_{\beta\gamma} &= -P\theta_0 \text{Sin } \psi_0 + Q\Phi_0 \text{Cos } \psi_0 - R\Phi_0 \text{Cos } \psi_0 + R\theta_0 \text{Sin } \psi_0, \\ a_{\alpha\gamma} &= -P\theta_0 \text{Cos } \psi_0 - Q\Phi_0 \text{Sin } \psi_0 + R(\theta_0 \text{Cos } \psi_0 + \Phi_0 \text{Sin } \psi_0). \end{aligned} \right\} (66b)$$

Bij onzen slinger is ook  $R$  eene kleine grootheid van de eerste orde. Zal verder de draaiing der aarde een merkbaaren invloed op de beweging van den slinger hebben, zoo moet ook  $P - Q$  van de tweede orde klein zijn. Want wij hebben reeds daarvoor aangenomen dat  $A_0 - B_0$  van de tweede orde is, en wanneer  $W$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $\Phi_0$ ,  $\theta_0$  klein zijn, kan  $A_0 - B_0$  slechts om eene kleine grootheid van dezelfde orde afwijken van  $P - Q$ , zooals wij in § 3 zullen zien. Men kan dus tot op eerste machten van  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $\Phi_0$ ,  $\theta_0$  nauwkeurig stellen

$$\left. \begin{aligned} 2A_1^{\mu\mu} &= 2a_{\alpha\gamma}, & 2A_2^{\mu\mu} &= a_{\gamma\gamma} - a_{\alpha\alpha}, \\ 2A_1^{\mu\nu} &= 2a_{\beta\gamma}, & 2A_2^{\mu\nu} &= -a_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} (67)$$

Deze nauwkeurigheid is ten opzichte van  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  voldoende zooals bij (55) werd betoogd; geheel dezelfde redeneering ten opzichte van  $\Phi_0$  en  $\theta_0$  toont aan, dat ook hier de ontwikkeling tot de eerste macht kan worden beperkt.

Dus wordt  $T$  (met (19) en (63)) tot

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left\{ A_0^{\mu\mu} [-2m_2 \eta \xi] + A_0^{\nu\nu} [1 + \xi^2] + \right. \\ &\quad \left. + A_0^{\mu\nu} [m_2 + m_3 \xi + m_1 \eta + 2m_2 \xi^2 - \eta \xi] \right\} + \\ &+ \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \left\{ A_0^{\mu\mu} [1 - 2m_1 \xi + \xi^2 \eta_2] - \right. \\ &\quad \left. - A_0^{\mu\nu} m_1 \eta + a_{\alpha\gamma} \xi + \frac{1}{2}(a_{\gamma\gamma} - a_{\alpha\alpha}) \xi^2 \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} \left\{ 2A^{\mu\mu} \left[ -m_2 - m_3 \xi - m_1 \eta - 2m_2 \xi + \eta \xi - \frac{m_2}{2} \eta^2 \right] + \right. \\
& \quad + 2A_0^{\nu\nu} m_1 \eta + 2A_0^{\nu\nu} (-1 - \xi^2 + m_1 \xi - \frac{1}{2} \eta^2) - \\
& \quad \left. - (a_{\gamma\gamma} - a_{\alpha\alpha}) m_2 \xi^2 - a_{\gamma\beta} \xi + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \xi^2 \right\}, \dots (68)
\end{aligned}$$

rangschikkende en lettende op (70) komt

$$\left. \begin{aligned}
A_{\xi}^{\xi\xi} &= 0, & A_{\eta}^{\xi\xi} &= 0, & A_{\xi}^{\xi\eta} &= -2A_0^{\mu\mu} m_3 - a_{\gamma\beta}, \\
A_{\eta}^{\xi\eta} &= -2A_0^{\mu\mu} m_1 + 2A_0^{\nu\nu} m_1, & A_{\xi}^{\eta\eta} &= -2A_0^{\mu\mu} m_1 + a_{\alpha\gamma}, \\
A_{\eta}^{\eta\eta} &= 0, \\
A_{\xi_2}^{\xi\xi} &= A_0^{\nu\nu}, & A_{\xi\eta}^{\xi\xi} &= -2m_2 A_0^{\mu\mu} - A_0^{\nu\nu}, & A_{\eta^2}^{\xi\xi} &= 0, \\
A_{\xi_2}^{\eta\eta} &= A_0^{\mu\mu} + \frac{1}{2}(a_{\gamma\gamma} - a_{\alpha\alpha}), & A_{\xi\eta}^{\eta\eta} &= 0, & A_{\eta_2}^{\eta\eta} &= A_0^{\mu\mu}, \\
A_{\xi_2}^{\xi\eta} &= -4A_0^{\mu\mu} m_2 - A_0^{\nu\nu} - m_2(a_{\gamma\gamma} - a_{\alpha\alpha}) + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}, \\
A_{\xi\eta}^{\xi\eta} &= 2A_0^{\mu\mu}, & A_{\eta^2}^{\xi\eta} &= -m_2 A_0^{\mu\mu} - \frac{1}{2} A_0^{\nu\nu},
\end{aligned} \right\} (69)$$

Nu is volgens (20)

$$A_0^{\mu\mu} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\alpha} + W), \quad A_0^{\nu\nu} = \frac{1}{2} a_{\beta\beta}, \quad A_0^{\mu\nu} = -a_{\beta\beta} m_2 + a_{\alpha\beta}. \quad (70)$$

en zullen wij  $W$  (zie ook bij form. 20) van de tweede orde klein stellen, wat bij een drager van middelmatige afmetingen geoorloofd is. Daar verder (68)

$$A_0^{\xi\xi} = A_0^{\nu\nu}, \quad A_0^{\eta\eta} = A_0^{\mu\mu}, \quad A_0^{\xi\eta} = -2A_0^{\mu\mu} - A_0^{\nu\nu} \dots (71)$$

en

$$A_0^{\mu\mu} = \frac{1}{2} P, \quad A_0^{\nu\nu} = \frac{1}{2} P, \quad A_0^{\mu\nu} = -P m_2$$

volgens onze onderstellingen kan worden gesteld, komt

$$\left. \begin{aligned}
A_{\xi}^{\xi\xi} &= 0, & A_{\eta}^{\xi\xi} &= 0, & A_{\xi}^{\xi\eta} &= -P m_3 - a_{\gamma\beta}, & A_{\eta}^{\xi\eta} &= 0, \\
A_{\xi}^{\eta\eta} &= -P m_1 + a_{\alpha\gamma}, & A_{\eta}^{\eta\eta} &= 0, \\
A_{\xi_2}^{\xi\xi} &= \frac{1}{2} P, & A_{\xi\eta}^{\xi\xi} &= 0, & A_{\eta^2}^{\xi\xi} &= 0, \\
A_{\xi_2}^{\eta\eta} &= \frac{1}{2} P, & A_{\xi\eta}^{\eta\eta} &= 0, & A_{\eta^2}^{\eta\eta} &= \frac{1}{2} P, \\
A_{\xi_2}^{\xi\eta} &= 0, & A_{\xi\eta}^{\xi\eta} &= P, & A_{\eta^2}^{\xi\eta} &= 0.
\end{aligned} \right\} (73)$$

Verder (26)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} A &= A^{\xi\xi} \cos^2 \psi_D + A^{\eta\eta} \sin^2 \psi_D + A^{\xi\eta} \sin \psi_D \cos \psi_D, \\ \frac{1}{2} B &= A^{\xi\xi} \sin^2 \psi_D + A^{\eta\eta} \cos^2 \psi_D - A^{\xi\eta} \sin \psi_D \cos \psi_D, \\ C &= 2(-A^{\xi\xi} + A^{\eta\eta}) \sin \psi_D \cos \psi_D + A^{\xi\eta} (\cos^2 \psi_D - \sin^2 \psi_D); \end{aligned} \right\} (74)$$

dus

$$\left. \begin{aligned} A_{\xi\xi} &= P \cos^2 \psi_D + R \sin^2 \psi_D, & A_{\xi\eta} &= 2P \sin \psi_D \cos \psi_D, & A_{\eta\xi} &= P \sin^2 \psi_D, \\ B_{\xi\xi} &= P \sin^2 \psi_D + R \cos^2 \psi_D, & B_{\xi\eta} &= -2P \cos \psi_D \sin \psi_D, & B_{\eta\xi} &= P \cos^2 \psi_D, \\ C_{\xi\xi} &= (R - P) \sin \psi_D \cos \psi_D, & C_{\xi\eta} &= P \cos 2\psi_D, & C_{\eta\xi} &= P \sin \psi_D \cos \psi_D, \end{aligned} \right\} (76)$$

en

$$\left. \begin{aligned} A_{\varphi\varphi} &= A_{\xi\xi} \cos^2 \psi_D + A_{\eta\xi} \sin^2 \psi_D + A_{\xi\eta} \sin \psi_D \cos \psi_D, \\ A_{\varphi\theta} &= (-2 A_{\xi\xi} + 2 A_{\eta\xi}) \sin \psi_D \cos \psi_D + A_{\xi\eta} \cos 2\psi_D, \\ A_{\theta\varphi} &= A_{\xi\xi} \sin^2 \psi_D + A_{\eta\xi} \cos^2 \psi_D - A_{\xi\eta} \sin \psi_D \cos \psi_D. \end{aligned} \right\} (77)$$

Met dergelijke formules voor de  $B$  en  $C$  coëfficiënten komt

$$\left. \begin{aligned} A_{\varphi\varphi} &= P + R \sin^2 \psi_D \cos^2 \psi_D, & A_{\varphi\theta} &= -2R \sin^3 \psi_D \cos \psi_D, \\ & & A_{\theta\varphi} &= R \sin^4 \psi_D, \\ B_{\varphi\varphi} &= R \cos^4 \psi_D, & B_{\varphi\theta} &= -2R \cos^3 \psi_D \sin \psi_D, \\ & & B_{\theta\varphi} &= P + R \sin^2 \psi_D \cos^2 \psi_D, \\ C_{\varphi\varphi} &= R \sin \psi_D \cos^3 \psi_D, & C_{\varphi\theta} &= P - 2R \sin^2 \psi_D \cos^2 \psi_D, \\ & & C_{\theta\varphi} &= R \sin^3 \psi_D \cos \psi_D. \end{aligned} \right\} (78)$$

Volgens (55) zijn de termen, die afkomstig zijn van de eendige amplituden (en die 0 zouden worden bij amplituden van de tweede orde), die welke met  $A_{\varphi_2}$  enz. vermenigvuldigd zijn. Wij zien uit (78), dat in deze  $m_1, m_2, m_3, \phi_0, \theta_0, W$  expliciete niet voorkomen en slechts tengevolge hebben, dat in plaats van  $\psi_0$  een andere waarde  $\psi_D$  treedt, die door (27) als functie van  $\psi_0$  en de vorige grootheden  $m_1, m, m_3, \phi_0, \theta_0, W$  bepaald wordt. Eveneens zullen wij zien, dat tengevolge daarvan, dat  $m, m_1, m_3, \phi_0$  en  $\theta_0$  en  $W$  niet nul zijn, de symmetrieassen van de beweging van het waargenomen punt van den slinger bij oneindig kleine amplituden ten opzichte van het vaste mes het azimuth  $\psi_D$  hebben in plaats van  $\psi_0$ , hetwelk bij  $m_1 = m_2 = m_3 = \phi_0 = \theta_0 = 0$  behoort.

Om de storingsfunctie geheel te kennen moet nog  $L$  ontwikkeld worden.

Noemen wij  $\tilde{\omega}_{x_3}, \tilde{\omega}_{y_3}, \tilde{\omega}_{z_3}$  de ontbondenen van de draaiings-

snelheid der aarde volgens de assen der  $x_3, y_3, z_3$  zoo is (volgens de meetkundige beteekenis van  $L$  als gegeven in n°. 2 van 't 1<sup>e</sup> Stuk, volgens 31, 16, en overeenkomstig 17)

$$L = a_{\alpha\alpha}\pi\tilde{\omega}_{x_3} + a_{\beta\beta}\chi\tilde{\omega}_{y_3} + a_{\gamma\gamma}\rho\tilde{\omega}_{z_3} + a_{\alpha\beta}(\pi\tilde{\omega}_{y_3} + \chi\tilde{\omega}_{x_3}) + \\ + a_{\alpha\gamma}(\pi\tilde{\omega}_{z_3} + \rho\tilde{\omega}_{x_3}) + a_{\beta\gamma}(\chi\tilde{\omega}_{z_3} + \rho\tilde{\omega}_{y_3}) + W\omega_{x'}\frac{d\mu}{dt} \dots (79)$$

Hierin moet volgens (6) worden ingevoerd

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_{x_3} &= \alpha_1\tilde{\omega}_{x'} + \beta_1\tilde{\omega}_{y'} + \gamma_1\tilde{\omega}_{z'}, \\ \tilde{\omega}_{y_3} &= \alpha_2\tilde{\omega}_{x'} + \beta_2\tilde{\omega}_{y'} + \gamma_2\tilde{\omega}_{z'}, \\ \tilde{\omega}_{z_3} &= \alpha_3\tilde{\omega}_{x'} + \beta_3\tilde{\omega}_{y'} + \gamma_3\tilde{\omega}_{z'}, \end{aligned} \right\} \dots (80)$$

of tot op grootheden van de 4<sup>e</sup> orde (59), die van de eerste orde ten opzichte van  $\mu$  en  $\nu$  en van de  $m$  zijn, — en tot welke wij ons bepalen mogen, omdat tweede machten van  $\mu$  en  $\nu$  in  $\tilde{\omega}_{x_3}, \tilde{\omega}_{y_3}, \tilde{\omega}_{z_3}$  tot grootheden van de vijfde orde en voortdurend afwisselend teeken in  $L$  aanleiding geven — nauwkeurig;

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_{x_3} &= \tilde{\omega}_{x'} + m_2\tilde{\omega}_{y'} + \tilde{\omega}_{z'}(m_1\mu - \nu), \\ \tilde{\omega}_{y_3} &= -m_2\tilde{\omega}_{x'} + \tilde{\omega}_{y'} + \tilde{\omega}_{z'}\mu, \\ \omega_{z_3} &= \tilde{\omega}_{x'}\nu + (m_2\nu - \mu)\tilde{\omega}_{y'} + \tilde{\omega}_{z'}; \end{aligned} \right\} \dots (81)$$

en eveneens tot op grootheden van de tweede orde (15)

$$\pi = \frac{d\mu}{dt}, \quad \chi = \frac{d\nu}{dt} - m_2\frac{d\mu}{dt}, \quad \rho = \nu\frac{d\mu}{dt}; \dots (82)$$

of in  $\xi$  en  $\eta$  uitgedrukt (62)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_3} &= \tilde{\omega}_{x'} + m_2\tilde{\omega}_{y'} - m_2\tilde{\omega}_{z'}\eta - \tilde{\omega}_{z'}\xi, \\ \omega_{y_3} &= -m_2\tilde{\omega}_{x'} + \tilde{\omega}_{y'} - \tilde{\omega}_{z'}\eta + m_2\tilde{\omega}_{z'}\xi, \\ \omega_{z_3} &= \tilde{\omega}_{x'} + \tilde{\omega}_{z'}\xi + \tilde{\omega}_{y'}\eta, \\ \pi &= (m_2 + m_3\xi + m_1\eta)\frac{d\xi}{dt} + (-1 + m_1\xi)\frac{d\eta}{dt}, \\ \chi &= \frac{d\xi}{dt} + (m_1\eta + m_2)\frac{d\eta}{dt}, \\ \rho &= m_2\xi\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\eta}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots (84)$$

Verwaarloost men bij deze substitutie weer die coëfficiënten van producten van  $\tilde{\omega}, \xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ , welke van de tweede orde zijn,

als  $W$ ,  $a_{\alpha\beta}$ ,  $a_{\alpha\alpha} - a_{i^2\beta}$  en producten van  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  onderling of met  $a_{\alpha\gamma}$ ,  $a_{\beta\gamma}$ ,  $a_{\gamma\gamma}$  en rangschikt men, zoo komt met eene schrijfwijze volgens het gewone beginsel:

uit

$$L^\eta = a_{\alpha\alpha}(-1 + m_1 \xi)(\tilde{\omega}_{x'} + m_2 \tilde{\omega}_{y'} - m_2 \tilde{\omega}_{z'} \eta - \tilde{\omega}_{z'} \xi) + \\ + a_{\beta\beta}(m_1 \eta + m_2)(\tilde{\omega}_{y'} - \tilde{\omega}_{z'} \eta) + a_{\gamma\gamma}(-\xi) \tilde{\omega}_{x'} + a_{\alpha\beta}(-(\tilde{\omega}_{y'} - \tilde{\omega}_{z'} \eta)) + \\ + a_{\alpha\gamma}(-(\tilde{\omega}_{z'} + \tilde{\omega}_{x'} \xi + \tilde{\omega}_{y'} \eta) - \xi \tilde{\omega}_{x'}) + a_{\beta\gamma}(-\xi \tilde{\omega}_{y'}),$$

$$\left. \begin{aligned} L_\xi^\eta &= P(m_1 \tilde{\omega}_{x'} + \tilde{\omega}_{z'}) - a_{\gamma\gamma} \tilde{\omega}_{z'} - 2 a_{\alpha\gamma} \tilde{\omega}_{x'} - a_{i^2\gamma} \tilde{\omega}_{y'}, \\ \text{en evenzoo uit } L_\eta^\xi, \\ L_\eta^\xi &= P(m_1 \tilde{\omega}_{x'} - \tilde{\omega}_{z'}) + a_{\gamma\beta} \tilde{\omega}_{y'}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Wij hebben slechts deze coëfficiënten noodig, want volgens (24) is

$$L_\varphi^\vartheta = (-L_\xi^\xi + L_\eta^\eta) \text{Cos } \psi_D \text{Sin } \psi_D + L_\xi^\eta \text{Cos}^2 \psi_D - L_\eta^\xi \text{Sin}^2 \psi_D,$$

$$L_\vartheta^\varphi = (-L_\xi^\xi + L_\eta^\eta) \text{Cos } \psi_D \text{Sin } \psi_D - L_\xi^\eta \text{Sin}^2 \psi_D + L_\eta^\xi \text{Cos}^2 \psi_D,$$

en deze komen in (55) alleen voor in de verbanding

$$\begin{aligned} L_\varphi^\vartheta - L_\vartheta^\varphi &= L_\xi^\eta - L_\eta^\xi = \\ &= -[(2P - R) \tilde{\omega}_{z'} + 2 a_{\beta\gamma} \tilde{\omega}_{y'} + 2 a_{\alpha\gamma} \tilde{\omega}_{x'}] \dots \dots \quad (86) \end{aligned}$$

Noemt men  $w_{z_0}$  de ontbondenen van de draaiingsnelheid der aarde volgens de  $z_0$ -as, de verbindingslijn van ophangpunt en zwaartepunt, of binnen de grenzen der waarneming tevens de ontbondene van de draaiingssnelheid der aarde volgens de naar beneden gerichte verticaal van het ophangpunt, zoo is volgens (8) en (9)

$$\tilde{\omega}_{x'} = \tilde{\omega}_{x_0} - m_1 \tilde{\omega}_{z_0},$$

$$\tilde{\omega}_y = \tilde{\omega}_{y_0} + m_3 \tilde{\omega}_{z_0},$$

$$\tilde{\omega}_{z'} = m_1 \tilde{\omega}_{x_0} - m_3 \tilde{\omega}_{y_0} + \tilde{\omega}_{z_0};$$

dus wordt 
$$L_\vartheta^\varphi - L_\varphi^\vartheta = 2 \Omega' P, \dots \dots \dots (87)$$

stellende

$$2 \Omega' P = (2P - R) \tilde{\omega}_{z_0} - 2 a_{\beta\gamma} \tilde{\omega}_{y_0} - 2 a_{\alpha\gamma} \tilde{\omega}_{x_0} + 2P(m_1 \tilde{\omega}_{x_0} - m_3 \tilde{\omega}_{y_0}). \quad (88)$$

Verder voeren wij in de storingsfunctie de  $A_{\varphi_2}$  enz. volgens (78) in. Die termen welke  $\text{Sin } \psi_D$  niet bevatten, vatten wij samen tot

$$S_A = -\frac{1}{16} \frac{h^2}{M} + \frac{3P - 2R}{4MP} \text{Sin}^2 T_0 \alpha (h - \alpha) - \frac{R}{4PM} \alpha (h - \alpha); \quad (89)$$

dan blijft nog overig

$$S_{\psi} = -\frac{R}{4MP} \left\{ h^2 \text{Sin}^2 \psi_D \text{Cos}^2 \psi_D - 8 \alpha (h - \alpha) \text{Sin}^2 \psi_D \text{Cos}^2 \psi_D + \right. \\ \left. + 4 \text{Sin}^2 T_0 \alpha (h - \alpha) \text{Sin}^2 \psi_D \text{Cos}^2 \psi_D + \right. \\ \left. + \text{Cos} T_0 \sqrt{\alpha(h - \alpha)} (h - 2\alpha) \text{Cos} 2\psi_D \text{Sin} 2\psi_D \right\} \dots \dots (90)$$

en wordt  $S = S_A + S_{\psi} + S_{\Omega} + S_U \dots \dots \dots (91)$

als  $S_{\Omega} = 2 \Omega' \sqrt{\frac{A_0}{M}} \text{Sin} T_0 \sqrt{\alpha(h - \alpha)} \dots \dots \dots (92)$

en  $S_U = -U'_{\varphi\theta} \frac{\sqrt{\alpha(h - \alpha)}}{M} \text{Cos} T_0,$

(vergelijk (70), (71) en (66<sup>b</sup>), wat betreft de substitutie van  $A_0$  voor  $P$ ).

De storingsfunctie  $S_A + S_{\psi}$  bij eindige amplituden vindt men dus uit die, waarbij  $\psi_D = 0$  of  $\psi_D = 90^\circ$  is, door in plaats van

$$-\frac{R}{4PM} \alpha (h - \alpha) \text{ te stellen } -\frac{R}{4PM} \{ \alpha (h - \alpha) + S_{\psi} \}.$$

Maar deze laatste grootheid kan men in den volgenden opmerkelijken vorm brengen

$$-\frac{R}{16PM} \{ [h^2 - 4\alpha(h - \alpha) - 4\alpha(h - \alpha) \text{Cos}^2 T_0] \text{Sin}^2 2\psi_D + \\ + 4\alpha(h - \alpha) + 4 \text{Cos} T_0 \sqrt{\alpha(h - \alpha)} (h - 2\alpha) \text{Cos} 2\psi_D \text{Sin} 2\psi_D \}, \\ = -\frac{R}{16PM} \{ h \text{Sin}^2 2\psi_D + 4\alpha(h - \alpha) \text{Cos}^2 2\psi_D - 4\alpha(h - \alpha) \text{Cos}^2 T_0 \text{Sin}^2 2\psi_D + \\ + 4(h - 2\alpha) \sqrt{\alpha(h - \alpha)} \text{Cos} T_0 \text{Cos}^2 \psi_D \text{Sin} 2\psi_D \}, \\ = -\frac{R}{4PM} ((h - \alpha) \text{Cos}^2 \psi_D + \alpha \text{Sin}^2 2\psi_D - \text{Sin} 2\psi_D \text{Cos} T_0 \sqrt{\alpha(h - \alpha)}) \times \\ \times ((h - \alpha) \text{Sin}^2 \psi_D + \alpha \text{Cos}^2 \psi_D + \text{Sin} 2\psi_D \text{Cos} T_0 \sqrt{\alpha(h - \alpha)}).$$

Sierlijker kan men deze uitkomst uitdrukken door gebruik te maken van eene meetkundige beschouwing.  $\sqrt{\frac{2(h - \alpha)}{M}}$  en  $\sqrt{\frac{2\alpha}{M}}$  zijn de amplituden van de enkelvoudige slingeren volgens de assen der  $\phi$ ,  $\theta$  in welke men de elliptische beweging van het waargenomen punt op een bepaald oogenblik ontbinden kan en bij  $\psi_D = 0$  vallen deze assen samen met de  $\xi$ ,  $\eta$ -assen. Volgens de formules (93<sup>c</sup>) en (94), die wij later ontwikkelen zullen, zijn echter

$$a = \sqrt{\frac{2}{M} \{ (h - \alpha) \cos^2 \psi_D + \alpha \sin^2 \psi_D - \sin 2 \psi_D \sqrt{\alpha(h - \alpha)} \cos T_0 \}}$$

en

$$b = \sqrt{\frac{2}{M} \{ (h - \alpha) \sin^2 \psi_D + \alpha \cos^2 \psi_D + \sin 2 \psi_D \sqrt{\alpha(h - \alpha)} \cos T_0 \}},$$

de amplituden van de enkelvoudige slingeren volgens de assen der  $\xi$  (projectie van het vaste mes) en  $\eta$ , in welke men dezelfde elliptische beweging ontbinden kan. Wanneer wij om de gegeven slingeringsellips dus een rechthoek met zijden evenwijdig aan en loodrecht op het vaste mes en vervolgens om deze rechthoek een cirkel (vergelijk 1<sup>e</sup> Stuk n<sup>o</sup>. 17 en Pl. I, fig. 1) beschrijven; zoo is de storingsfunctie voor eindige amplituden, ook wanneer de slinger op alle beschreven wijzen, maar binnen de gestelde grenzen, afwijkt van het theoretisch eenvoudigste geval, de som van de vierkanten van drie oppervlakken elk met een bijzonderen coëfficiënt vermenigvuldigd, nl. van dat van den cirkel, van de slingeringsellips en van den omschreven rechthoek, en is de meetkundige beteekenis van de storingsfunctie in het behandelde samengestelde geval dezelfde als in het eenvoudigste. Bij den enkelvoudigen slinger komt van deze drie oppervlakken alleen de omschreven rechthoek niet in de storingsfunctie voor.

### § 3. *Invloed van de inrichting van den slinger op de ongestoorde beweging.*

Zoowel in de ligging van de assen, ten opzichte waarvan (47<sup>a</sup>) de LISSAJOUS'sche figuren bij nagenoeg gelijke slingertijden in twee richtingen loodrecht op elkaar (de  $\phi$  en  $\theta$ -assen) voorstellen (zie ook n<sup>o</sup>. 16 van 't 1<sup>e</sup> Stuk, dus in die beweging van den slinger, welke wij als ongestoorde aan dit onderzoek ten grondslag hebben gelegd, als in de storingsfunctie (91) van dit Hoofdstuk speelt de hoek  $\psi_D$  eene belangrijke rol. Wij zullen daarom in deze § nauwkeuriger nagaan hoe  $\psi_D$  en  $\sqrt{\frac{1}{A_0}} - \sqrt{\frac{1}{B_0}}$ , hetwelk  $p - q$  en daardoor den aard der ongestoorde beweging bepaalt, en in  $T_0$  in de storingsfunctie optreedt, samenhangen met de inrichting van den slinger. Bij dit onderzoek kunnen wij de amplituden oneindig klein stellen, over de grootte van  $m_1, m_2, m_3, \phi_0, \theta_0, \psi_0$  zullen wij geen voor-

afgaande onderstelling maken; evenmin zullen wij nu daarvan uitgaan, dat  $P-Q$  en  $W$  van de tweede orde klein zijn. Wij drukken nu de  $u, v, w$  (zie 10) uit in de  $x_0, y_0, z_0$  door

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1^0 x_0 + \beta_1^0 y_0 + \gamma_1^0 z_0, \\ v &= \alpha_2^0 x_0 + \beta_2^0 y_0 + \gamma_2^0 z_0, \\ w &= \alpha_3^0 x_0 + \beta_3^0 y_0 + \gamma_3^0 z_0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10^*)$$

dan zijn ook, de ontbondenen van de draaiingssnelheid van het slingerlichaam volgens de  $x_0, y_0, z_0$ -assen met  $\pi_0, \chi_0, \rho_0$  aanduidende,

$$\left. \begin{aligned} p &= \alpha_1^0 \pi_0 + \beta_1^0 \chi_0 + \gamma_1^0 \rho_0, \\ q &= \alpha_2^0 \pi_0 + \beta_2^0 \chi_0 + \gamma_2^0 \rho_0, \\ r &= \alpha_3^0 \pi_0 + \beta_3^0 \chi_0 + \gamma_3^0 \rho_0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13^*)$$

Voert men nu weder het symbool  $a_{\alpha\beta}^0$  in, dat uit  $a_{\alpha\beta}$  ontstaat, door voor  $\alpha'_1 \dots \gamma'_3$  overal te schrijven  $\alpha_1^0 \dots \gamma_3^0$ , dan wordt

$$2T_p = a_{\alpha\alpha}^0 \pi_0^2 + a_{\beta\beta}^0 \chi_0^2 + a_{\gamma\gamma}^0 \rho_0^2 + 2a_{\alpha\beta}^0 \pi_0 \chi_0 + 2a_{\alpha\gamma}^0 \pi_0 \rho_0 + 2a_{\beta\gamma}^0 \chi_0 \rho_0. \quad (17^*)$$

Stel nu verder

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \alpha_1''' x_3 + \beta_1''' y_3 + \gamma_1''' z_3, \\ y_0 &= \alpha_2''' x_3 + \beta_2''' y_3 + \gamma_2''' z_3, \\ z_0 &= \alpha_3''' x_3 + \beta_3''' y_3 + \gamma_3''' z_3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6^*)$$

dan is volgens (6) en (8)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1''' &= \alpha_1'' \alpha_1 + \beta_1'' \beta_1 + \gamma_1'' \gamma_1, & \alpha_2''' &= \alpha_2'' \alpha_1 + \beta_2'' \beta_1 + \gamma_2'' \gamma_1, \\ & \alpha_3''' &= \alpha_3'' \alpha_1 + \beta_3'' \beta_1 + \gamma_3'' \gamma_1, \\ \beta_1''' &= \alpha_1'' \alpha_2 + \beta_1'' \beta_2 + \gamma_1'' \gamma_2, & \beta_2''' &= \alpha_2'' \alpha_2 + \beta_2'' \beta_2 + \gamma_2'' \gamma_2, \\ & \beta_3''' &= \alpha_3'' \alpha_2 + \beta_3'' \beta_2 + \gamma_3'' \gamma_2, \\ \gamma_1''' &= \alpha_1'' \alpha_3 + \beta_1'' \beta_3 + \gamma_1'' \gamma_3, & \gamma_2''' &= \alpha_2'' \alpha_3 + \beta_2'' \beta_3 + \gamma_2'' \gamma_3, \\ & \gamma_3''' &= \alpha_3'' \alpha_3 + \beta_3'' \beta_3 + \gamma_3'' \gamma_3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9^*)$$

Bij oneindig kleine amplituden is volgens (15)

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \text{Cos } m_2 \frac{d\mu}{dt}, \\ \chi &= \frac{d\nu}{dt} - \text{Sin } m_2 \frac{d\mu}{dt}, \\ \rho &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15^*)$$

verder met (6\*)

$$\left. \begin{aligned} \pi_0 &= \alpha_1''' \pi + \beta_1''' \chi, \\ \chi_0 &= \alpha_2''' \pi + \beta_2''' \chi, \\ \rho_0 &= \alpha_3''' \pi + \beta_3''' \chi. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14^*)$$

Om nu  $T_p$  uit te drukken in  $\frac{d\xi}{dt}$  en  $\frac{d\eta}{dt}$ , merke men op, dat  $\pi$  en  $\chi$  deze snelheden lineair bevatten en dat men dus bij de ontwikkeling van  $\pi_0$  in de coëfficiënten  $\alpha_1'''$  enz. de amplituden 0 mag stellen; dan wordt volgens (9) en (7) en (9\*)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{10}''' &= \text{Cos } m_1 \text{Cos } m_2 + \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Sin } m_2, & \alpha_{20}''' &= \text{Cos } m_3 \text{Sin } m_2, \\ \alpha_{30}''' &= -\text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 + \text{Cos } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Sin } m_2, \\ \beta_{10}''' &= -\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 + \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2, & \beta_{20}''' &= \text{Cos } m_3 \text{Cos } m_2, \\ \beta_{30}''' &= \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_2 + \text{Cos } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2, \end{aligned} \right\} (59^*)$$

wanneer men deze waarden van  $\alpha_1'''$  enz. door  $\alpha_{10}'''$  enz. aangeeft.

Om  $\mu$  en  $\nu$  in  $\xi$  en  $\eta$  uit te drukken vergelijk men (21) met (9\*);

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha_1''' (\alpha_3'' \text{Cos } m_2 + \beta_3'' \text{Sin } m_2) + \\ &+ \alpha_2''' (\beta_3'' \text{Cos } m_2 - \alpha_3'' \text{Sin } m_2) + \alpha_3''' \gamma_3'', \\ \eta &= \beta_1''' (\alpha_3'' \text{Cos } m_2 + \beta_3'' \text{Sin } m_2) + \\ &+ \beta_2''' (\beta_3'' \text{Cos } m_2 - \alpha_3'' \text{Sin } m_2) + \beta_3''' \gamma_3''. \end{aligned} \right\} (21^*)$$

Tot op eerste machten van de amplituden is

$$\begin{aligned} \alpha_1''' &= \text{Cos } m_1 \text{Cos } m_2 + \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Sin } m_2 + \text{Sin } m_1 \text{Cos } m_3 (\mu \text{Sin } m_2 - \nu), \\ \beta_1''' &= -\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 + \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2 + \text{Sin } m_1 \text{Cos } m_3 \text{Cos } m_2 \mu, \\ \gamma_1''' &= \text{Cos } m_1 \text{Cos } m_2 \nu + \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 (\nu \text{Sin } m_2 - \mu) + \text{Sin } m_1 \text{Cos } m_3, \\ \alpha_2''' &= \text{Cos } m_3 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_3 (\mu \text{Sin } m_2 - \nu), \\ \beta_2''' &= \text{Cos } m_3 \text{Cos } m_2 - \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2 \mu, \\ \gamma_2''' &= \text{Cos } m_3 (\nu \text{Sin } m_2 - \mu) - \text{Sin } m_3, \\ \alpha_3''' &= -\text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 + \text{Cos } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Sin } m_2 + \text{Cos } m_1 \text{Cos } m_3 (\mu \text{Sin } m_2 - \nu), \\ \beta_3''' &= \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_2 + \text{Cos } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2 + \text{Cos } m_1 \text{Cos } m_3 \text{Cos } m_2 \mu, \\ \gamma_3''' &= -\text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 \nu + \text{Cos } m_1 \text{Sin } m_3 (\nu \text{Sin } m_2 - \mu) + \text{Cos } m_1 \text{Cos } m_3. \end{aligned}$$

Met deze en (9) vindt men

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \nu \text{Cos } m_2 \text{Cos } m_3, \\ \eta &= -\mu \text{Cos } m_1 + \nu (\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2), \end{aligned} \right\} (60^*)$$

en hunne oplossing is

$$\nu = \frac{\xi}{\text{Cos } m_2 \text{Cos } m_3}, \quad \mu = \frac{-\eta}{\text{Cos } m_1} + \xi \frac{\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2}{\text{Cos } m_1 \text{Cos } m_2 \text{Cos } m_3} \quad (61^*)$$

Hiermede vindt men volgens (14\*)

$$\left. \begin{aligned} \pi_0 &= \text{Cos } m_1 \frac{d\mu}{dt} - (\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2) \frac{d\nu}{dt} = -\frac{d\eta}{dt}, \\ \chi_0 &= \text{Cos } m_3 \text{Cos } m_2 \frac{d\nu}{dt} = \frac{d\xi}{dt}, \end{aligned} \right\} (84^*)$$

gelijk men tengevolge van de beteekenis van  $\pi_0$ ,  $\chi_0$ ,  $\eta$  en  $\xi$  terstond voor oneindig kleine amplituden kon opschrijven, en

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= -\text{Sin } m_1 \frac{d\mu}{dt} + (\text{Sin } m_1 \text{Sin } m_2 + \text{Cos } m_1 \text{Sin } m_3 \text{Cos } m_2) \frac{d\nu}{dt}, \\ \rho_0 &= \frac{d\eta}{dt} \frac{\text{Sin } m_1}{\text{Cos } m_1} + \frac{d\xi}{dt} \frac{\text{Sin } m_3}{\text{Cos } m_1 \text{Cos } m_3}. \end{aligned} \right\} (84^*)$$

Met (17\*) komt dus

$$\begin{aligned} 2T &= a_{\alpha\alpha}^0 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + a_{\beta\beta}^0 \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + a_{\gamma\gamma}^0 \left(\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \frac{\text{Sin}^2 m_1}{\text{Cos}^2 m_1} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \frac{\text{Sin}^2 m_3}{\text{Cos}^2 m_1 \text{Cos}^2 m_3} + 2 \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} \frac{\text{Sin } m_1 \text{Sin } m_3}{\text{Cos}^2 m_1 \text{Cos } m_3}\right) - 2a_{\alpha\gamma}^0 \left(\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \frac{\text{Sin } m_1}{\text{Cos } m_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\eta}{dt} \frac{d\xi}{dt} \frac{\text{Sin } m_3}{\text{Cos } m_1 \text{Cos } m_3}\right) - 2a_{\alpha\beta}^0 \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \\ &\quad + 2a_{\beta\gamma}^0 \left(\frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} \frac{\text{Sin } m_1}{\text{Cos } m_1} + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \frac{\text{Sin } m_3}{\text{Cos } m_1 \text{Cos } m_3}\right) + \\ &+ W \left[ \frac{1}{\text{Cos}^2 m_1} \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(\frac{\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 \text{Sin } m_3}{\text{Cos } m_1 \text{Cos } m_2 \text{Cos } m_3}\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} \frac{\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 \text{Sin } m_3}{\text{Cos}^2 m_1 \text{Cos } m_2 \text{Cos } m_3} \right], \end{aligned}$$

of met (23)

$$\left. \begin{aligned} A_0^{\eta\eta} &= a_{\alpha\alpha}^0 + a_{\gamma\gamma}^0 \text{Tg}^2 m_1 - 2a_{\alpha\gamma}^0 \text{Tg } m_1 + \frac{W}{\text{Cos}^2 m_1}, \\ A_0^{\xi\xi} &= a_{\beta\beta}^0 + a_{\gamma\gamma}^0 \frac{\text{Tg}^2 m_3}{\text{Cos}^2 m_1} + 2a_{\beta\gamma}^0 \frac{\text{Tg } m_3}{\text{Cos } m_1} + \\ &\quad + W \left(\frac{\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 \text{Sin } m_3}{\text{Cos } m_2 \text{Cos } m_2 \text{Cos } m_3}\right)^2, \\ A_0^{\xi\eta} &= 2a_{\gamma\gamma}^0 \frac{\text{Tg } m_1 \text{Tg } m_3}{\text{Cos } m_1} - 2a_{\alpha\gamma}^0 \frac{\text{Tg } m_3}{\text{Cos } m_1} - 2a_{\alpha\beta}^0 + \\ &\quad + 2a_{\beta\gamma}^0 \text{Tg } m_1 - 2W \left(\frac{\text{Cos } m_1 \text{Sin } m_2 - \text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 \text{Sin } m_3}{\text{Cos } m_1 \text{Cos } m_2 \text{Cos } m_3}\right). \end{aligned} \right\} (71^*)$$

Beschouwen wij eerst het geval, dat  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ; dan wordt

$$A_0^{\eta\eta} = a_{\alpha\alpha}^0 + W, \quad A_0^{\xi\xi} = a_{\beta\beta}^0, \quad A_0^{\xi\eta} = -2a_{\alpha\beta}^0;$$

de bepaling van  $\psi_D$  is dezelfde als die van de ligging der assen van de ellips

$$A_0^{\eta\eta} \eta^2 + A_0^{\xi\xi} \xi^2 + A_0^{\xi\eta} \xi \eta = 1 \dots \dots \dots (e)$$

Was ook  $W = 0$ , dan zou deze ellips volgens de beteekenis van  $a_{\alpha\alpha}^0, a_{\beta\beta}^0, a_{\alpha\beta}^0$ '), die zijn, welke ontstaat, wanneer het traagheidsellipsoid van het ophangpunt gesneden wordt door het horizontale vlak der  $x_0, y_0$ . Zoekt men de hoofdassen  $\sqrt{\frac{1}{A_0}}$  en  $\sqrt{\frac{1}{B_0}}$  van deze doorsnede, zoo vindt men  $\psi_D$ , wanneer men den hoek van de projectie van het vaste mes op het horizontale vlak der  $\xi, \eta$ , dus van de  $\xi$ -as met de naastbijgelegen as van de ellips (e) links omgaande positief neemt. Waren ook  $\phi_0$  en  $\theta_0$  beide nul, zoo zou deze hoek  $\psi_0$  zijn, immers dan valt eene hoofdsnede van het traagheidsellipsoid in het horizontale vlak. In het algemeen zal echter  $\psi_D$  van  $\psi_0$  afwijken, wanneer  $\phi_0$  en  $\theta_0$  van nul verschillend zijn, en deze afwijking is bij kleine waarden van  $\phi_0$  en  $\theta_0$  des te sterker naarmate de doorsnede van het traagheidsellipsoid met het horizontale vlak minder van een cirkel verschilt, d. i.  $\sqrt{\frac{1}{A_0}}$  en  $\sqrt{\frac{1}{B_0}}$  minder verschillen.

Om dit te verduidelijken zullen wij (11) tot op tweede machten van  $\phi_0$  en  $\theta_0$  ontwikkelen.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' &= \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right) \cos \psi_0 - \phi_0 \theta_0 \sin \psi_0, \\ \beta_1' &= \phi_0 \theta_0 \cos \psi_0 + \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right) \sin \psi_0, \\ \alpha_2' &= -\left(1 - \frac{\phi_0^2}{2}\right) \sin \psi_0, \quad \beta_2' = \left(1 - \frac{\phi_0^2}{2}\right) \cos \psi_0, \\ \alpha_3' &= \theta_0 \cos \psi_0 + \phi_0 \sin \psi_0, \quad \beta_3' = -\phi_0 \cos \psi_0 + \theta_0 \sin \psi_0. \end{aligned} \right\} (11^*)$$

Hiermede wordt de teller van  $Tg 2 \psi_D$  (zie (27)),

$$\begin{aligned} -2 a_{\alpha\beta} &= -2 P(1 - \theta^2) \cos \psi_0 \sin \psi_0 + \phi_0 \theta_0 \sin^2 \psi_0 + \phi_0 \theta_0 \cos^2 \psi_0 + \\ &+ 2 Q(1 - \phi_0) \sin \psi_0 \cos \psi_0 - 2 R[(\theta_0^2 - \phi_0^2) \cos \psi_0 \sin \psi_0 + \\ &+ \phi_0 \theta_0 (\sin^2 \psi_0 - \cos^2 \psi_0)], \end{aligned}$$

1) Over het geheele slingerlichaam sommeerende is namelijk

$$a_{\alpha\alpha}^0 = \Sigma m(y_0^2 + z_0^2), \quad a_{\beta\beta}^0 = \Sigma m(x_0^2 + z_0^2), \quad a_{\alpha\beta}^0 = \Sigma m x_0 y_0.$$

of,  $P - Q$  klein van de eerste orde stellende,

$$-2 a_{\alpha\beta} = -(P - Q) \sin 2\psi_0 + (R - P)[(\theta_0^2 - \phi_0^2) \sin 2\psi_0 - 2\phi_0\theta_0 \cos 2\psi_0].$$

Evenzoo vindt men voor den noemer

$$-(a_{\alpha\alpha} - a_{\beta\beta}) = -(P - Q) \cos 2\psi_0 + (R - P)[(\theta_0^2 - \phi_0^2) \cos 2\psi_0 + 2\phi_0\theta_0 \sin 2\psi_0],$$

$$\text{en} \quad \frac{P - Q + (R - P)(\theta_0^2 - \phi_0^2)}{2(R - P)\phi_0\theta_0} = \text{Tg } 2g,$$

$$\text{stellende,} \quad \text{Tg } 2\psi_D = \frac{\sin 2(\psi_0 - g)}{\cos 2(\psi_0 - g)},$$

$$\psi_D = \psi_0 - g.$$

Is  $P - Q$  dus van de tweede orde,  $\phi_0$  en  $\theta_0$  van de eerste orde klein, zoo kan men voor  $\psi_D$  een geheel anderen hoek dan  $\psi_0$  vinden.

Gaan wij na deze uitweiding terug tot de ellips ( $e$ ) en stellen wij  $W$  niet langer nul. Om dan aan  $\psi_D$  en  $A_0 - B_0$  eene mechanische beteekenis te hechten stellen wij ons voor, dat het oppervlak van de ellips, die wij voor het geval, dat  $W = 0$  was construeerden, met massa bedekt wordt (bijv. gelijkmatig of alleen in de richting van de groote en kleine as), zoodat daardoor de hoofdtraagheidsmomenten van de ellips en de ligging van hunne assen dezelfde worden als die, welke uit het traagheidsellipsoid van het slingerlichaam volgen.

Dan brenge men in de as, die met het traagheidsmoment  $a_{\beta\beta}$  overeenkomt, de  $y_0$ -as, eene massa aan die om de andere as,  $x_0$ ,  $W$  tot traagheidsmoment heeft; de hoofdassen van deze nieuwe massaverdeeling bepalen door hunne ligging  $\psi_D$ , door hun verschil

$$\sqrt{\frac{1}{A_0}} - \sqrt{\frac{1}{B_0}}.$$

Nemen wij nu aan, dat  $m_2$  niet langer nul is; volgens (71\*) wordt dan

$$A_0^{\eta\eta} = a_{\alpha\alpha}^0 + W, \quad A_0^{\xi\xi} = a_{\beta\beta}^0 + W \text{Tg}^2 m_2, \quad A_0^{\xi\eta} = -2(a_{\alpha\beta}^0 + W \text{Tg} m_2).$$

In dit geval behoeft men dus slechts de massa, die  $W$  tot traagheidsmoment heeft, evenwijdig aan de  $x_0$ -as te verschuiven tot hare verbindingslijn met den oorsprong den hoek  $m_2$  met de  $y_0$ -as insluit, om verder als in het vorige te werk te kunnen gaan. Nu kunnen wij overgaan tot het algemeene geval, dat ook over  $m_1$  en  $m_3$  geene bijzondere veronderstelling wordt gemaakt. Volgens (71\*) en (27) zal men dan in 't algemeen weer geheel andere waarden voor  $\psi_D$  en

$$\sqrt{\frac{1}{A_0}} - \sqrt{\frac{1}{B_0}} \text{ vinden. Om ook in dit geval aan de afleiding van}$$

beide eene meetkundige beteekenis te hechten, willen wij de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  uitdrukken door de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Dit laatste stelsel is volgens (1) en (2), dat, waarvan de  $z'$ -as loodrecht staat op het vlak van de beide scherpe kanten der messen in hun evenwichtsstand, en waarvan de  $x'$  in de scherpe kant van het vaste mes valt. Stellen wij

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1^{IV} x' + \beta_1^{IV} y' + \gamma_1^{IV} z', \\ v &= \alpha_2^{IV} x' + \beta_2^{IV} y' + \gamma_2^{IV} z', \\ w &= \alpha_3^{IV} x' + \beta_3^{IV} y' + \gamma_3^{IV} z', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10^{**})$$

zoo laten zich  $\alpha_1^{IV} \dots \gamma_3^{IV}$  uit (6) en (10) bepalen, vormen wij dan de symbolen  $a_{\alpha\beta}^{IV}$ ,  $a_{\alpha\alpha}^{IV}$ ,  $a_{\beta\beta}^{IV}$ ,  $a_{\gamma\gamma}^{IV}$ ,  $a_{\beta\gamma}^{IV}$ ,  $a_{\alpha\gamma}^{IV}$ , juist zoo als  $a_{\alpha\beta}$  enz. en  $a_{\alpha\beta}^0$  enz., zoodat dus

$$a_{\alpha\beta}^{IV} = P \alpha_1^{IV} \beta_1^{IV} + Q \alpha_2^{IV} \beta_2^{IV} + R \alpha_3^{IV} \beta_3^{IV}$$

wordt, en noemt men  $\pi'$ ,  $\chi'$ ,  $\rho'$  de ontbondenen van de draaiingsnelheid van het slingerlichaam volgens de assen der  $x'$ ,  $y'$ ,  $z$ , dan vindt men (zie (17\*)) voor de levende kracht van het slingerlichaam

$$2 T_p = a_{\alpha\alpha}^{IV} \pi'^2 + a_{\beta\beta}^{IV} \chi'^2 + a_{\gamma\gamma}^{IV} \rho'^2 + 2 a_{\alpha\beta}^{IV} \pi' \chi' + 2 a_{\alpha\gamma}^{IV} \pi' \rho' + 2 a_{\beta\gamma}^{IV} \chi' \rho'. \quad (17^{**})$$

Wij zullen nu  $\xi'$ ,  $\eta'$  invoeren, die eene overeenkomstige beteekenis hebben als  $\xi$ ,  $\eta$ . Daartoe kiezen wij op de  $z'$ -as een punt met de coördinaten

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 1,$$

wanneer de slinger in den evenwichtstoestand is; de  $x'$  en  $y'$  coördinaten van dit punt wanneer de slinger zich in een anderen stand bevindt noemen wij  $\xi'$  en  $\eta'$ . Wanneer wij ons nu de ontwikkelingen herinneren, die tot (71\*) voerden; blijkt, dat men  $T$  kan brengen in den vorm

$$A_0^{\xi'\xi'} \left( \frac{d\xi'}{dt} \right)^2 + A_0^{\eta'\eta'} \left( \frac{d\eta'}{dt} \right)^2 + A_0^{\xi'\eta'} \left( \frac{d\xi'}{dt} \right) \left( \frac{d\eta'}{dt} \right),$$

waar

$$A_0^{\eta'\eta'} = a_{\alpha\alpha}^{IV} + W, \quad A_0^{\xi'\xi'} = a_{\beta\beta}^{IV} + W T g^2 m_2,$$

$$A_0^{\xi'\eta'} = -2(a_{\alpha\beta}^{IV} + W T g m_2).$$

Op de ellips

$$A_0^{\xi'\xi'} \xi'^2 + A_0^{\eta'\eta'} \eta'^2 + A_0^{\xi'\eta'} \xi' \eta' = 1 \dots \dots \dots (e^*)$$

geheel dezelfde redeneering toepassende als op de ellips (e), blijkt, dat ligging en grootte van hare hoofdassen gevonden worden, wan-

neer men het traagheidsellipsoid van het slingerlichaam snijdt door het vlak, dat door de scherpe kanten der beide messen in den evenwichtsstand is gelegd; over dit vlak massa's zoo uitbreidt, dat zij dezelfde hoofdtraagheidsmomenten en dezelfde ligging der assen opleveren, als uit het traagheidsellipsoid volgen; vervolgens eene massa, die in een punt van de  $y'$ -as liggende ten opzichte van de  $x'$ -as het traagheidsmoment  $W$  heeft, evenwijdig aan de  $x'$ -as verschuift, tot zij ten opzichte van de  $y'$ -as het azimuth  $m_2$  heeft (d. i. in de scherpe kant van het tweede mes valt); en ten slotte de grootte en ligging der hoofdtraagheidsassen van de geheele massaverdeeling over het snijvlak bepaalt. Met de ligging en grootte van deze hoofdassen hangen die van de ellips

$$A_0^{\xi\xi} \xi^2 + A_0^{\eta\eta} \eta^2 + A_0^{\xi\eta} \xi \eta = 1 \dots \dots \dots (e)$$

eenvoudig samen. Om dit in te zien voere men in beiden in plaats van  $\xi'$ ,  $\eta'$  en in plaats van  $\xi$ ,  $\eta$  nieuwe coördinatenstelsels, die der  $\xi''$ ,  $\eta''$  en die der  $\xi''$ ,  $\eta''$  in, door eenvoudig het  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  en het  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ -stelsel respectie om de  $z'$  en  $z_0$ -as te draaien, tot de  $x'$ -as en de  $x_0$ -as in de knooplijn van het vlak der  $x'$ ,  $y'$  en der  $x_0$ ,  $y_0$  vallen; de ellips ( $e^*$ ) moge dan den vorm

$$a' \xi'''^2 + b' \eta'''^2 + c' \xi''' \eta''' = 1,$$

de ellips ( $e$ ) den vorm

$$a \xi''^2 + b \eta''^2 + c \xi'' \eta'' = 1$$

aannemen. Beide ellipsen zijn echter dezelfde gebleven. Nu is bij oneindig kleine amplituden  $-\eta''$  zoowel als  $-\eta'''$ , (zie 84\*) de draaiing van het slingerlichaam om de knooplijn van het vlak der messen met het horizontaal vlak; maar terwijl  $\xi''$  de draaiing van den slinger om een lijn in het horizontale vlak en loodrecht op de knooplijn gelegen aangeeft, is bij eene helling  $i$  van het vlak der messen op het horizontale vlak  $\xi'' = \xi'' \cos i$ ; de ellips ( $e$ ) is dus die, welke ontstaat wanneer men de massaverdeeling behoorende bij ( $e^*$ ) en in het vlak der messen gelegen, projecteert op het horizontale vlak, en dan de traagheidsellips voor deze nieuwe massaverdeeling bepaalt.

Deze redeneering samenvattende vindt men  $\psi_D$  en  $p - q$  als volgt. Zoek, wanneer de slinger in den evenwichtsstand is, de hoofdassen van de elliptische snede van het traagheidsellipsoid van het slingerlichaam voor het ophangpunt met het vlak der scherpe kanten van beide messen. Leg in elk dier assen de massa 1 op een afstand van het ophangpunt gelijk aan het omgekeerd kwadraat van de lengte

van de andere as, verder in die lijn van het vlak, welke met de scherpe kant van het bovenmes overeenkomt, op den afstand 1 van de lijn, die met het benedenmes overeenkomt, eene massa gelijk aan het traagheidsmoment van den drager om het vaste mes. Projecteer deze massaverdeeling op het horizontale vlak en bepaal ligging en grootte der hoofdassen van de traagheidsellips dezer nieuwe massaverdeeling.  $\psi_D$  is de hoek, die linksomgaande positief geteld, uit de projectie van het vaste mes op hetzelfde vlak naar de naastbijgelegen hoofdas voert, de lengte van deze hoofdas is  $\sqrt{\frac{1}{A_0}}$ , die

van de andere  $\sqrt{\frac{1}{B_0}}$ , en  $p - q$  is, wanneer het zwaartepunt van den drager in het vaste mes valt, de wortel uit het draaiingsmoment van den slinger vermenigvuldigd met hun verschil.

Zoo hebben wij op vrij eenvoudige wijze een inzicht gekregen in den samenhang van  $\psi_D$  en  $p - q$  met de inrichting van den slinger. Voor de berekening van beiden zal men echter liever (71\*), niet (27) en (26), volgens welke laatste

$$A_0 - B_0 = 2 \sqrt{(A_0^{\xi\xi} - A_0^{\eta\eta})^2 + (A_0^{\xi\eta})^2} = 2 \frac{(A_0^{\xi\xi} - A_0^{\eta\eta})}{\text{Cos } 2\psi_D}$$

is, gebruiken.

Wanneer het zwaartepunt van den drager niet in de scherpe kant van het vaste mes valt, wordt volgens (47<sup>a</sup>)  $p - q = \sqrt{\frac{M''}{A_0}} - \sqrt{\frac{M'}{B_0}}$ .

Wij zullen derhalve  $M''$  en  $M'$  ontwikkelen, waarbij tevens de waarde van  $U_{\varphi\theta}$  bepaald kan worden. Daartoe moeten wij de krachtfunctie der zwaarte vormen. Zij is

$$\Sigma m z_0,$$

wanneer men over alle massa's,  $m$ , van het slingerlichaam en van den drager sommeert en laat zich splitsen in twee andere sommen. Voor de eerste, die alleen van den drager afkomstig is, vindt men gemakkelijk

$$\text{standvastige} + M_a \text{Cos}(m_a + m_3 + \mu). \text{Cos } m_1,$$

wanneer men het product van het gewicht van den drager en van den loodrechten afstand van het zwaartepunt er van tot de scherpe kant van het vaste mes  $M_a$  en de hoek van deze loodlijn met eene loodlijn op het steunvlak van het bewegelijke mes neergelaten  $m_a$  noemt, welke laatste hoek men van de  $z'$ -as naar de  $y'$ -as moet meten.

Om het gedeelte, dat afkomstig is van het slingerlichaam uit te drukken, leggen wij door het bewegelijke mes in zijn evenwichtsstand als  $\eta$ -as een verticaal vlak en in dit vlak de  $\zeta$ -as van een linksch coördinatenstelsel der  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . De coördinaten van het zwaartepunt ten opzichte van dit stelsel worden bepaald door  $m$ , den hoek, die linksomgaande van de  $\zeta$ -as naar de verbindingslijn van het zwaartepunt met het ophangpunt voert; en wel zijn de coördinaten van een punt op den afstand 1 van 't ophangpunt op die verbindingslijn gelegen

$$\zeta_M = \text{Cos } m, \quad \eta_M = -\text{Sin } m, \quad \xi_M = 0.$$

Nu kan men dit stelsel verkrijgen door het  $x_3, y_3, z_3$ -stelsel in den evenwichtsstand om de  $y_2$  of w. h. i. om de  $y_3$ -as te draaien. Den draaiingshoek, die dit laatste stelsel samen doet vallen met dat der  $\xi, \eta, \zeta$ , zullen wij  $d$  noemen en verder als hulphoek gebruiken. Voor de  $x_3, y_3, z_3$  coördinaten van het zoeven beschouwde punt vindt men zoo

$$x_{3M} = \xi_M \text{Cos } d + \zeta_M \text{Sin } d,$$

$$y_{3M} = \eta_M,$$

$$z_{3M} = \zeta_M \text{Cos } d - \xi_M \text{Sin } d.$$

Dus over het geheele slingerlichaam sommeerende

$$\Sigma m x_3 = M \text{Cos } m, \text{Sin } d,$$

$$\Sigma m z_3 = M \text{Cos } m, \text{Cos } d,$$

$$\Sigma m y_3 = -M \text{Sin } m.$$

Uit deze onveranderlijke grootheden volgen nu terstond met (6\*)

$$U' = \Sigma m z_0 = \text{standvastige} + M_a \text{Cos}(m_a + m_3 + \mu) + \\ + M(\alpha_3''' \text{Sin } m, \text{Sin } d + \beta_3''' \text{Cos } m, + \gamma_3''' \text{Sin } m, \text{Cos } d),$$

[ de coëfficiënten in de ontwikkeling

$$U' = U'_0 + U'_\mu \mu + U'_\nu \nu + U'_{\mu^2} \mu^2 + U'_{\nu^2} \nu^2 + U'_{\mu\nu} \mu\nu + \text{enz.}$$

Wegens den evenwichtsstand van den slinger bij  $\mu = 0$  en  $\nu = 0$  is

$$U'_\mu = 0, \quad U'_\nu = 0,$$

welke laatste vergelijking, volgens de ontwikkelingen van  $\alpha_1'''$  enz. naar machten van  $\mu$  en  $\nu$ , uitvoeriger geschreven

$$0 = -M \text{Sin } m_3 \text{Sin } d \text{Cos } m_1 \text{Cos } m_3 + M \text{Sin } m, \text{Cos } d (-\text{Sin } m_1 \text{Cos } m_2 + \\ + \text{Cos } \mu_1 \text{Sin } m_3 \text{Sin } m_2)$$

wordt, en den hulphoek  $d$  bepaalt door

$$Tgd = \frac{\cos m_1 \sin m_3 \sin m_2 - \sin m_1 \cos m_2}{\cos m_1 \cos m_3}.$$

Verder met (9\*), (7) en (9)

$$U'_{\mu 2} = -\frac{1}{2} \left\{ M(\cos m_1 \sin d \cos m_1 \sin m_3 \sin m_2 - \sin m_1 \cos m_1 \sin m_3 \cos m_2 + \cos m_1 \cos d \cos m_1 \cos m_3) + M_d \cos m \cos(m_d + m_1) \right\} \quad (34^*)$$

$$U'_{\mu \nu} = M \cos m_1 (\sin d \cos m_1 \sin m_3 + \cos m_1 \sin m_2),$$

$$U'_{\nu 2} = -\frac{1}{2} M \cos m_1 \left\{ \sin d (\cos m_1 \sin m_3 \sin m_2 - \sin m_1 \cos m_2) + \cos d \cos m_1 \cos m_3 \right\}.$$

Hieruit volgt met (61\*), stellende

$$U' = U'_0 + U'_{\xi 2} \xi^2 + U'_{\xi \eta} \xi \eta + U'_{\eta 2} \eta^2,$$

$$U'_{\xi 2} = \frac{1}{\cos^2 m_1 \cos^2 m_3} U'_{\nu 2} + \left( \frac{\cos m_1 \sin m_2 - \sin m_1 \sin m_3 \cos m_2}{\cos m_1 \cos m_2 \cos m_3} \right)^2 U'_{\mu 2} + U'_{\mu \nu} \frac{\cos m_1 \sin m_2 - \sin m_1 \sin m_3 \cos m_2}{\cos m_1 \cos^2 m_2 \cos^2 m_3} \dots \quad (35^*)$$

$$U'_{\eta 2} = \frac{1}{\cos^2 m_1} U'_{\mu 2},$$

$$U'_{\xi \eta} = -2 U'_{\mu 2} \frac{\cos m_1 \sin m_2 - \sin m_1 \sin m_3 \cos m_2}{\cos^2 m_1 \cos m_2 \cos m_3}.$$

En eindelijk als in (74)

$$\left. \begin{aligned} M'' = U'_{\varphi 2} &= U'_{\xi 2} \cos^2 \psi_D + U'_{\eta 2} \sin^2 \psi_D + U'_{\xi \eta} \sin \psi_D \cos \psi_D, \\ M' = U'_{\vartheta 2} &= U'_{\xi 2} \sin^2 \psi_D + U'_{\eta 2} \cos^2 \psi_D - U'_{\xi \eta} \sin \psi_D \cos \psi_D, \\ U'_{\varphi \vartheta} &= (U'_{\eta 2} - U'_{\xi 2}) \sin 2\psi_D + U'_{\xi \eta} \cos 2\psi_D. \end{aligned} \right\} \quad (74^*)$$

Aan deze ontwikkelingen laat zich evenwel niet als bij die ten opzichte der  $A$ -grootheden eene eenvoudige mechanische beteekenis hechten. Ten slotte willen wij echter nog opmerken, dat in de in deze § behandelde ongestoorde beweging van den slinger door ons de term  $U_{\varphi \vartheta} \varphi \vartheta$  (zie (35)) niet opgenomen is, en dat men haar dus niet moet verwarren met de beweging van den slinger bij oneindig kleine amplituden en afgezien van de wrijving en van de draaiing der aarde. Want deze wordt bepaald door (zie 71\* en 35\*)

$$A_0^{\xi \xi} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + A_0^{\eta \eta} \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + A_0^{\xi \eta} \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} = U'_0 + U'_{\xi 2} \xi^2 + U'_{\eta 2} \eta^2 + U'_{\xi \eta} \xi \eta$$

en geeft in 't algemeen aanleiding tot verschijnselen, die men LISSAJOUS' *figuren in scheefhoekige coördinaten* zou kunnen noemen, veranderlijke slingerbanen, die voortdurend een scheefhoekig parallelogram aanraken, welks zijden zulk eene richting hebben, dat zij tegelijkertijd de geconjungeerde assen van de ellips ( $e$ ) en van de ellips

$$U'_{\xi^2} \xi^2 + U'_{\eta^2} \eta^2 + U'_{\xi\eta} \xi\eta = 1$$

zijn.

§ 4. *De oneindig kleine bewegingen zonder wrijving teruggebracht tot die welke in Hoofdstuk II van het 1<sup>e</sup> Stuk zijn beschreven.*

Als ongestoorde beweging legden wij aan dit onderzoek (47<sup>a</sup>) ten grondslag, die de LISSAJOUS'sche figuren bij de nagenoeg gelijke slingertijden  $\frac{2\pi}{p}$  en  $\frac{2\pi}{q}$  in de door  $\psi_D$  bepaalde richtingen voorstellen.

Laten wij nu met deze  $S_{J_2}$  samenvatten, dat van  $S$  alleen overblijft, wanneer men de amplituden zoo klein neemt, dat zij van de tweede orde, dus oneindig klein gesteld kunnen worden, en onderstelt, dat het zwaartepunt van den drager in het vaste mes valt. Immers (46, 47<sup>b</sup> en 92)

$S_{J_2}$  en  $E'$  zijn ten opzichte van de amplituden  $\left(\sqrt{\frac{2(h-z)}{M}}\right)$  en  $\sqrt{\frac{2z}{M}}$

van dezelfde orde, hunne verhouding blijft dus dezelfde wanneer men de amplituden kleiner en kleiner neemt, maar de orde van  $S_\psi + S_A$  (89 en 90) ten opzichte van de amplitude is de dubbele van die van  $E'$  en de verhouding van  $S_\psi + S_A$  tot  $E'$  neemt dus af wanneer de amplituden kleiner worden. Bij amplituden, die van de tweede orde klein zijn is  $S_\psi + S_A$  ten opzichte van  $E'$  van de vierde orde, en mag volgens de aan (38) voorafgaande redeneering verwaarloosd worden, terwijl  $S_{J_2}$ , dat steeds van de tweede orde ten opzichte van  $E'$  is, op de ongestoorde beweging eenen invloed uitoefent, die van de grootte der amplituden onafhankelijk is. Wij komen dus evenals in n<sup>o</sup>. 33 en 38 van 't 1<sup>e</sup> Stuk terug tot (81) en (82) van het 1<sup>e</sup> Stuk, of met andere woorden onder den invloed van  $S_{J_2}$  worden de bewegingen van het waargenomen punt van den slinger, tot die, welke voor de betrekkelijke beweging dezelfde beteekenis hebben als de figuren van LISSAJOUS voor de volstreckte, en die in het 1<sup>e</sup> Stuk n<sup>o</sup>. 22 en vlg. beschreven zijn. In plaats van  $\alpha_0$  en  $\beta_0$  komt hier  $\alpha$  en  $\beta$ , in plaats van  $\gamma$   $\Omega'$  en in plaats van  $x_i$  en  $y_i$ ,  $\phi \sqrt{A_0}$  en

$\theta \sqrt{B_0}$ . Dit laatste heeft, daar  $\sqrt{A_0}$  en  $\sqrt{B_0}$  slechts om eene grootheid van de tweede orde bij de proeven afwijken, geen anderen merkbaaren invloed, dan dat de afmetingen van de slingeringskrommen, op wier vorm en ligging het echter zoowel in Hoofdstuk II van het 1<sup>e</sup> Stuk als in deze § alleen aankomt, in eene andere eenheid moeten worden uitgedrukt.

De veranderingen van vorm en ligging der slingeringskrommen en van den zin van de beweging van het waargenomen punt in deze worden dus bepaald door de grondformulen (A) en (B) van 't 1<sup>e</sup> Stuk. In deze moet

$$\text{Cotg } \psi = \frac{p-q}{2\Omega'}, \quad 0 < \psi < 180^\circ,$$

$$\text{Cos } \psi' = \sqrt{\text{Cos}^2 \psi}, \quad 0 < \psi' < 90^\circ,$$

en 
$$D = \frac{-\Omega'}{\text{Sin } \psi'} t, \quad \text{of } \gamma = \Omega',$$

genomen worden. (Vergelijk (93), (96) en (115) van 't 1<sup>e</sup> Stuk met (47<sup>a</sup>) en (92) hier). Dan is  $X$  de hoek van de groote as van de slingeringsellips met de  $\phi$ -as, in den zin van de  $\phi$ - naar de  $\theta$ -as positief genomen;  $\chi$  als in 't 1<sup>e</sup> Stuk de ellipticiteitshoek; en komt  $[-]$  overeen met eene beweging in de ellips in den zin van de  $\theta$ -as naar de  $\phi$ -as.

Deze bewegingen zijn in 't 1<sup>e</sup> Stuk uitvoerig behandeld; zij zijn periodisch en hunne periode,  $\Pi$ , wordt bepaald door (126) van 't 1<sup>e</sup> Stuk. Wij zullen hier nagaan, hoe men de symmetrieassen en de periode der bewegingen van den slinger kan veranderen, of m. a. w. hoe men van gegeven waarden  $\psi_D$  en  $\Pi$  tot andere waarden  $\psi'_D$  en  $\Pi'$  kan overgaan. Dit is een vraagstuk, waarop men terstond bij het doen van proeven met dezen slinger stuit. Om dit op te lossen is loodrecht op de  $z_0$ -as boven het messenpaar een tafeltje aan het slingerlichaam bevestigd, waarop men gewichten kan plaatsen. Wij vonden

$$p-q = \sqrt{\frac{M''}{A_0}} - \sqrt{\frac{M'}{B_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{A_0} \frac{B_0 - A_0}{B_0}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{A_0} \frac{M'' - M'}{M}},$$

waar  $A_0$  en  $B_0$ ,  $M''$  en  $M'$  slechts ten bedrage van eene oneindig kleine grootheid verschillen. Dus is volgens (126), (110) en (115) van 't 1<sup>e</sup> Stuk

$$\frac{B_0 - A_0}{B_0} + \frac{M'' - M'}{M} = 2 \sqrt{\frac{A_0}{M}} (p - q) = \frac{T'}{\pi} (p - q) =$$

$$= \frac{p - q}{\sqrt{(p - q)^2}} \frac{2 T' \cos \psi'}{\Pi} = \frac{2 \cos \psi' T'}{\Pi} \frac{\Omega'}{\sqrt{\Omega'^2}} = \frac{2 T'}{\pi} \Omega' \operatorname{Cotg} \psi,$$

en

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{B_0 - A_0}{B_0} + \frac{M'' - M'}{M}\right)^2}}{2 T' \cos \psi'}$$

wanneer  $T$ , de slingertijd (heen en terug bij rechthoekige slingerin- gen) van onzen slinger is. Wij zullen hier het geval nagaan, dat  $M'' - M' = 0$  en  $U'_{\varphi} = 0$  is, dan is

$$\frac{B_0 - A_0}{B_0} = \frac{2 T'}{\pi} \Omega' \operatorname{Cotg} \psi \quad \text{of} \quad \Pi = 2 T' \cos \psi' \sqrt{\left(\frac{A_0}{B_0 - A_0}\right)^2},$$

waaruit men  $A_0 - B_0$  berekenen kan. Het komt er dus slechts op aan van bepaalde waarden van  $A_0 - B_0$  en  $\psi_n$  tot willekeurige an- dere  $A'_0 - B'_0$  en  $\psi'_n$  over te gaan. Nu is echter

$$A^{\xi\xi} - A^{\eta\eta} = \frac{A_0 - B_0}{2} \cos 2\psi_n \quad \text{en} \quad A^{\xi\eta} = \frac{A_0 - B_0}{2} \sin 2\psi_n,$$

en moet dus

$$(A'_0 - B'_0) \cos 2\psi'_n - (A_0 - B_0) \cos 2\psi_n = 2 (A^{\xi\xi} - A^{\eta\eta})' - 2 (A^{\xi\xi} - A^{\eta\eta}),$$

$$(A'_0 - B'_0) \sin 2\psi'_n - (A_0 - B_0) \sin 2\psi_n = 2 (A^{\xi\eta})' - 2 A^{\xi\eta},$$

zijn. Om deze verandering in  $A^{\xi\xi}$ ,  $A^{\eta\eta}$  en  $A^{\xi\eta}$  aan te brengen, plaatsen wij cilindrische gewichten, wier as evenwijdig met de  $z_0$ -as loopt op het beschreven tafeltje; terwijl wij er zorg voor dragen dat de zwaartepunten symmetrisch ten opzichte van de  $z_0$ -as en in het- zelfde horizontale vlak (evenwijdig aan dat van het tafeltje) vallen. Dan verandert de evenwichtstand van den slinger niet en blijft  $M'' - M' = 0$ ; alleen  $a_{\alpha\alpha}^0$ ,  $a_{\beta\beta}^0$ ,  $a_{\alpha\beta}^0$  en  $a_{\gamma\gamma}^0$  veranderen, en de ver- andering van  $a_{\alpha\alpha}^0 - a_{\beta\beta}^0$  en van  $a_{\alpha\beta}^0$  hangt alleen af van de massa's en van de plaats der zwaartepunten van de gewichten.

Stellen wij nu weer  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $\phi_0$ ,  $\theta_0$  van de eerste,  $W$  en  $P - Q$  van de tweede orde klein, zoo behoeft men in  $a_{\alpha\alpha}^0$ ,  $a_{\alpha\beta}^0$  en  $a_{\beta\alpha}^0$  slechts veranderingen van de tweede orde aan te brengen. De wijzi- ging van  $a_{\gamma\gamma}^0$  komt echter in (71\*) alleen met grootheden van de tweede orde vermenigvuldigd voor, en kan dus tegenover de wijzi- gingen in  $a_{\alpha\alpha}^0$ ,  $a_{\alpha\beta}^0$  en  $a_{\beta\beta}^0$  verwaarloosd worden; dan worden, de veranderingen van  $a_{\alpha\alpha}^0$ , enz. met  $[a_{\alpha\alpha}^0]'$  enz. aanduidende

$$2(A^{\xi\xi} - A^{\eta\eta})' - 2(\mathcal{A}^{\xi\xi} - \mathcal{A}^{\eta\eta}) = [a_{\beta\beta}^0]' - [a_{\alpha\alpha}^0],$$

$$(\mathcal{A}^{\xi\eta})' - \mathcal{A}^{\xi\eta} = -[a_{\alpha\beta}^0]'$$

Noemen wij nu  $F$  het product van de massa der toegevoegde gewichten aan de eene zijde van de  $z_0$ -as met het vierkant van den afstand van hun zwaartepunt tot deze as, verder  $f$  het azimuth waarin hun zwaartepunt ligt; zoo is

$$[a_{\beta\beta}^0]' - [a_{\alpha\alpha}^0]' = 2F \cos 2f = (A_0' - B_0') \cos 2\psi_D - (A_0 - B_0) \cos 2\psi_D$$

$$- 2[a_{\alpha\beta}^0]' = -2F \sin 2f = (A_0' - B_0') \sin 2\psi_D' - (A_0 - B_0) \sin 2\psi_D.$$

Om dus tot gegeven andere waarden  $\Pi'$  en  $\psi_D'$  over te gaan, moet men uit  $\Pi'$  ( $\psi'$ ) berekenen, dan geeft

$$\text{Tg } 2f = - \frac{\text{Cotg}(\psi') \sin 2\psi_D' - \text{Cotg} \psi \sin 2\psi_D}{\text{Cotg}(\psi') \cos 2\psi_D' - \text{Cotg} \psi \cos 2\psi_D},$$

$$F = - \frac{T, B_0 \Omega'}{\pi \cos 2f} [\text{Cotg}(\psi') \cos 2\psi_D' - \text{Cotg} \psi \cos 2\psi_D],$$

$f$  en  $F$  voor de tot dit doel toe te voegen gewichten.

Het meer algemeen geval, dat ook  $U'_{\varphi\theta}$  in aanmerking wordt genomen, behandelen wij in Hoofdstuk IV.

Wanneer men de bewegingen van den slinger bij oneindig kleine amplituden en zonder invloed van de wrijving waar kon nemen, zou men  $\Omega'$  kunnen berekenen op de wijze, die voor het eenvoudigst geval van onzen slinger in Hoofdstuk III § 4 van 't 1<sup>e</sup> Stuk, werd aangegeven.

Bij de slingerproeven stelt men zich echter ten doel de ontbondene van de draaiingsnelheid der aarde volgens de naar beneden gerichte verticaal van de plaats van waarneming,  $\tilde{\omega}_{x_0}$  te bepalen. Bij de inrichting van onzen slinger kan het verschil van  $\Omega'$  en  $\tilde{\omega}_{x_0}$  (zie 88) eene grootheid van de derde, of ten opzichte van  $\tilde{\omega}_{x_0}$  van de eerste orde worden; men zal dit verschil in 't algemeen dus kunnen waarnemen. Naarmate men er meer zorg aan besteedt  $m_1$  en  $m_3$  tot nul te maken, wordt ook de term  $m_1 \tilde{\omega}_{x_0} - m_3 \tilde{\omega}_{y_0}$  van dit verschil kleiner. Maar wanneer wij dezen term ook zoo klein maken, dat hij aan de waarneming ontsnapt, zoo blijft nog  $-2(a_{\beta\gamma} \tilde{\omega}_{x_0} + a_{\alpha\gamma} \tilde{\omega}_{y_0})$  over. Is er grond te vermoeden, dat deze term een merkbaaren invloed op de uitkomsten hebben kan, zoo zal men hem moeten elimineeren, door nieuwe proeven te verrichten, nadat men den slinger met het  $x_0, y_0, z_0$ -stelsel om de  $z_0$ -as gedraaid heeft, maar hem ten opzichte van het  $x_0, y_0, z_0$ -stelsel onveranderd heeft

gelaten. Tot dit doel is het benedenmes op eene plaat bevestigd, die in haar eigen horizontaal vlak draaien kan.

Daarbij blijft in  $\Omega'$  alles hetzelfde behalve  $\tilde{\omega}_{y_0}$  en  $\tilde{\omega}_{x_0}$ . Wanneer wij de plaat juist  $180^\circ$  omdraaien, zal de nieuwe ligging van de vroegere  $x_0, y_0, z_0$  die van de nieuwe  $-x_0, -y_0, z_0$ -assen zijn. Bepalen wij nu weer  $\Omega'$  voor den slinger, en noemen wij deze nieuwe waarde  $\Omega'_{\pi}$ ; zoo is

$$\frac{1}{2}(\Omega' + \Omega'_{\pi}) = \frac{2P - R}{2P} \tilde{\omega}_{z_0}.$$

Evenzoo vonden wij in n<sup>o</sup>. 38 van 't 1<sup>e</sup> Stuk, voor het eenvoudigste theoretische geval van onzen slinger voor de draaiingsnelheid  $\gamma'$ , die verkregen zou worden wanneer men aannam, dat de bewegingen van het waargenomen punt plaats vonden onder de werking van krachten, die er in twee hoofdrichtingen dezelfde slingertijden  $\frac{2\pi}{P}$  en  $\frac{2\pi}{Q}$  aan zouden geven,

$$\gamma' = \frac{2P - R}{2P} \gamma w.$$

De invloed, die de draaiing der aarde op verschillende slingers, die dezelfde LISSAJOUS'sche figuren zouden vertoonen, wanneer de aarde in rust was, heeft, hangt dus zeer wezentlijk af van den vorm dier slingers. Nemen wij als vroeger aan, dat  $P$  en  $Q$  slechts om eene kleine grootheid van de tweede orde verschillen, dan is

$$\frac{2P - R}{2P} = \frac{P + Q - R}{2P} = \frac{2 \sum_i m_i w_i^2}{2P},$$

waar de som  $\Sigma$  over alle massas  $m_i$  van het slingerlichaam (niet van den drager) genomen moet worden en  $w_i$  de coördinaten van  $m_i$  in het  $u, v, w$ -stelsel zijn. Want volgens de bepaling van het coördinatenstelsel der  $u, v, w$  en van  $P, Q, R$  (§ 1) is

$$P = \sum_i m_i (v_i^2 + w_i^2), \quad Q = \sum_i m_i (u_i^2 + w_i^2), \quad R = \sum_i m_i (v_i^2 + u_i^2).$$

Deze factor, een echte breuk, wordt kleiner en nadert tot nul naarmate de vorm van den slinger meer en meer die van een slingerende schijf wordt, en overeenkomstig hiermede neemt de storing van de figuren van LISSAJOUS door de draaiing der aarde af. Men kan de waarde van

$$1 - \frac{R}{2P}$$

met voldoende nauwkeurigheid uit de afmetingen van den slinger berekenen en hiermede is  $\tilde{\omega}_{x_0}$  gevonden.

Neemt men ook nog  $S_U$  in aanmerking zoo verkrijgt men de bewegingsverschijnselen, die in n<sup>o</sup>. 32 van 't 1<sup>e</sup> Stuk werden behandeld.

§ 5. *Storingen in de elementen ten gevolge van de wrijving.*

In de vorige §§ stelden wij steeds, dat de slinger zijne beweging zonder wrijving en weerstand uitvoerde. Wij zullen nu zien, dat deze wezentlijk van invloed op de verschijnselen kan zijn. Bij onzen toestel bevrijden wij ons door het luchtledig pompen van den invloed, dien de weerstand van de lucht op de bewegingen kan hebben; te beschouwen blijft dus slechts de wrijving van de messen bij de slingering om hunne scherpe kant. Een van de groote voordeelen van onzen toestel is nu, dat men de wet volgens welke die weerstand met de snelheid der beweging samenhangt afgescheiden van den invloed van de draaiing der aarde (bij slingeringen om elk der messen afzonderlijk) volgen kan, en dezen invloed van de wrijving dan bij proeven, waar de slingeringen om beide messen vrij zijn, in rekening kan brengen. Het gedeelte van de versnelling der draaiing om beide messen, dat afkomstig is van de wrijving, kunnen wij als functie der draaiingssnelheden naar hunne opklimmende machten ontwikkelen. Bij onzen slinger bleek het noodig te zijn van deze ontwikkeling

$$\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)_D = - \left\{ A_D \frac{dv}{dt} + \sqrt{A_0} A'_D \frac{dv}{dt} \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \dots} \right\}$$

$$\left(\frac{d^2 \mu}{dt^2}\right)_D = - \left\{ B_D \frac{d\mu}{dt} + \sqrt{A_0} B'_D \frac{d\mu}{dt} \sqrt{\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \dots} \right\}, \dots \quad (93^a)$$

de twee eerste termen in rekening te brengen. De standvastigen  $A_D$ ,  $B_D$  en  $A_D \sqrt{A_0}$  en  $B_D \sqrt{A_0}$  (de vorm der coëfficiënten  $\sqrt{A_0} A'_D$ ,  $\sqrt{A_0} B'_D$  is tot vereenvoudiging van het volgende gekozen) kunnen in 't algemeen verschillend zijn, maar waren in ons geval van de tweede orde klein. Daaruit volgt, dat men in de ontwikkeling van  $v$  en  $\mu$  volgens  $\xi$  en  $\eta$ , de hoogere machten der laatste grootheden mag verwaarloozen. Wanneer er eindelijk groote zorg aan besteed is  $m_2$  tot nul te maken, en, als in ons geval, de geheele storing door de wrijving slechts geringen invloed op de ver-

schijnselen krijgt, zal men ook in (60)  $m_2$  nul mogen stellen en dus voor  $\nu$ ,  $\xi$  en voor  $\mu$ ,  $-\eta$  mogen schrijven. Verder kan men

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{M}} \text{Sin } p t'', \quad \eta = \frac{b}{\sqrt{M}} \text{Sin } (p t'' + \vartheta) \dots (93^b)$$

stellen, wegens (24) en (47<sup>a</sup>) is namelijk

$$\begin{aligned} \xi &= \phi \text{Cos } \psi_D - \theta \text{Sin } \psi_D = \sqrt{\frac{2(\hbar - \alpha_0)}{M}} \text{Sin } p t' \text{Cos } \psi_D - \sqrt{\frac{2\alpha}{M}} \text{Sin } q t' \text{Sin } \psi_D = \\ &= \left( \sqrt{\frac{2(\hbar - \alpha)}{M}} \text{Cos } \psi_D - \sqrt{\frac{2\alpha}{M}} \text{Sin } \psi_D \text{Cos } T_0 \right) \text{Sin } p t' - \\ &\quad - \sqrt{\frac{2\alpha}{M}} \text{Sin } T_0 \text{Sin } \psi_D \text{Cos } p t' = \frac{a}{\sqrt{M}} \text{Sin } (p t' - f) = \frac{a}{\sqrt{M}} \text{Sin } p t'', \end{aligned}$$

wanneer

$$a = \sqrt{2\hbar \{ (1 - \alpha') \text{Cos}^2 \psi_D + \alpha' \text{Sin}^2 \psi_D - \text{Sin } 2 \psi_D \text{Cos } T_0 \sqrt{\alpha' (1 - \alpha')} \}}, (93^c)$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\hbar}, \quad p t'' = p t' - f,$$

$$\text{en} \quad T_g f = \frac{\text{Sin } \psi_D \text{Sin } T_0 \sqrt{\alpha'}}{\sqrt{(1 - \alpha') \text{Cos } \psi_D - \text{Sin } \psi_D \text{Cos } T_0 \sqrt{\alpha'}}} \dots (94)$$

Evenzoo

$$\eta = \frac{b}{\sqrt{M}} \text{Sin } (p t' - g),$$

$$b = \sqrt{2\hbar \{ (1 - \alpha') \text{Sin}^2 \psi_D + \alpha' \text{Cos}^2 \psi_D + \text{Sin } 2 \psi_D \text{Cos } T_0 \sqrt{\alpha' (1 - \alpha')} \}} (94^b)$$

$$\text{en} \quad T_g g = \frac{-\text{Cos } \psi_D \text{Sin } T_0 \sqrt{\alpha'}}{\sqrt{(1 - \alpha') \text{Sin } \psi_D + \text{Cos } \psi_D \text{Cos } T_0 \sqrt{\alpha'}}} \dots (95)$$

Dus is in (93)

$$\vartheta = f - g \dots (96)$$

Wij hebben in § 4 gezien hoe de bewegingen van onzen slinger, bij eindige amplituden en de draaiing van het coördinatenstelsel in rekening brengende, ten opzichte van de  $\phi$  en  $\theta$ -assen voorgesteld kan worden door de beweging in een vlak van een punt met de massa 1 onder de werking van de krachtfunctie  $-(p^2 x_i^2 + q^2 y_i^2)$  ten opzichte van een rechthoekig coördinatenstelsel, waarvan de  $y_i$ -as links omgaande op de  $x_i$ -as volgt, terwijl de canonische elementen van de ellips tegelijkertijd veranderen tengevolge van de storingsfunctie

$S$ , die wij in die elementen hebben uitgedrukt. Uit  $x_i$  en  $y_i$  vindt men dan  $\phi$  en  $\theta$  door

$$x_i = \phi \sqrt{A_0}, \quad \text{en } y_i = \theta \sqrt{A_0} \dots \dots (97)$$

De beweging van dit punt stelt evenzoo de beweging van den slinger onder den invloed der wrijving voor, wanneer men er nog op laat werken eene storende kracht, die aan het punt zulk eene versnelling geeft, dat de daaruit volgens  $x_i = \phi \sqrt{A_0}$  en  $y_i = \theta \sqrt{A_0}$ , en volgens (24) volgende versnellingen van  $\xi$  en  $\eta$  de draaiingsversnellingen der wrijving zijn, welke uit (93<sup>a</sup>) met  $\mu = -\eta$  en  $\nu = \xi$ , zooals wij aantoonen, volgen. Nemen wij nu een nieuw coördinaatensstelsel aan met denzelfden oorsprong als de  $x_i y_i$  en ten opzichte daarvan evenzoo gelegen als de  $\xi, \eta$ -assen ten opzichte van de  $\phi$  en  $\theta$ -assen; en noemen wij de coördinaten in dit nieuwe stelsel,  $\xi'$  en  $\eta'$ , zoodat  $\xi' = \xi \sqrt{A_0}$  en  $\eta' = \eta \sqrt{A_0}$ . De ontbondenen van de storende kracht zijn dan ten opzichte van de  $\xi'$  en  $\eta'$ -assen

$$\Xi = \sqrt{A_0} \left( \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right)_D = - \left\{ A_D \sqrt{A_0} \frac{d\xi}{dt} + A'_D \left( \sqrt{A_0} \frac{d\xi}{dt} \sqrt{A_0} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 \right) + \dots \right\},$$

$$H = \sqrt{A_0} \left( \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right)_D = - \left\{ B_D \sqrt{A_0} \frac{d\eta}{dt} + B'_D \left( \sqrt{A_0} \frac{d\eta}{dt} \sqrt{A_0} \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right) + \dots \right\};$$

of met (93) en (47<sup>a</sup>)

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= - \left\{ A_D a \text{Cos } pt''' + A'_D a^2 \text{Cos } pt''' \sqrt{\text{Cos}^2 pt''} + \dots \right\}, \\ H &= - \left\{ B_D b \text{Cos}(pt''' + \theta) + B'_D b^2 \text{Cos}(pt''' + \theta) \sqrt{\text{Cos}^2(pt''' + \theta)} + \dots \right\}, \end{aligned} \right\} (98)$$

en de ontbondenen derzelfde kracht volgens de  $x_i$  en  $y_i$ -assen

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \Xi \text{Cos } \psi_D + H \text{Sin } \psi_D, \\ Y_i &= H \text{Cos } \psi_D - \Xi \text{Sin } \psi_D. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (99)$$

Volgens de formules (67) en (68) van 't 1<sup>e</sup> Stuk, die de uitbreiding van de storingsformules van SCHERING zijn, komt er dus bij de verandering der elementen van onze ellips een deel, dat van de storende krachten der wrijving afkomstig is en dat wij met  $( )_D$  zullen onderscheiden. Dit deel is

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{dx}{dt} \right)_D &= - X_i \frac{\partial x_i}{\partial \beta} - Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \beta}, \\ \left( \frac{dh}{dt} \right)_D &= - X_i \frac{\partial x_i}{\partial \tau} - Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \tau}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (100)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_D &= X_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}, \\ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_D &= X_i \frac{\partial x_i}{\partial h} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial h}; \end{aligned} \right\} \dots (100)$$

want  $\alpha$  en  $h$  behooren tot die klasse van elementen, welke in n°. 3 van 't 1<sup>e</sup> Stuk  $\psi$ ,  $\beta$  en  $\tau$  tot die, welke daar  $\phi$ , werden genoemd. In (100) is volgens (47<sup>a</sup>) en (97)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \beta} &= 0, & \frac{\partial y_i}{\partial \beta} &= -\sqrt{2\alpha} \operatorname{Cos} q t'', \\ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} &= -\frac{\operatorname{Sin} p t'}{p \sqrt{2(h-\alpha)}}, & \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} &= \frac{\operatorname{Sin} q t''}{q \sqrt{2\alpha}}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau} &= -\sqrt{2(h-\alpha)} \operatorname{Cos} p t', & \frac{\partial y_i}{\partial \tau} &= -\sqrt{2\alpha} \operatorname{Cos} q t'', \\ \frac{\partial x_i}{\partial h} &= \frac{\operatorname{Sin} p t'}{p \sqrt{2(h-\alpha)}}, & \frac{\partial y_i}{\partial h} &= 0. \end{aligned} \right\} (101)$$

Met de vier vorige vergelijkingen wordt

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_D &= H \operatorname{Cos} \psi_D \sqrt{2\alpha} \operatorname{Cos} q t'' - \Xi \operatorname{Sin} \psi_D \sqrt{2\alpha} \operatorname{Cos} q t'', \\ \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_D &= \Xi \left( \frac{-\operatorname{Cos} \psi_D \operatorname{Sin} p t'}{p \sqrt{2(h-\alpha)}} - \frac{\operatorname{Sin} \psi_D \operatorname{Sin} q t''}{q \sqrt{2\alpha}} \right), \\ &+ H \left( \frac{-\operatorname{Sin} \psi_D \operatorname{Sin} p t'}{p \sqrt{2(h-\alpha)}} + \frac{\operatorname{Cos} \psi_D \operatorname{Sin} q t''}{q \sqrt{2\alpha}} \right), \\ \left(\frac{dh}{dt}\right)_D &= \Xi (\operatorname{Cos} \psi_D \operatorname{Cos} p t' \sqrt{2(h-\alpha)} - \operatorname{Sin} \psi_D \sqrt{2\alpha} \operatorname{Cos} q t''), \\ &+ H (\operatorname{Sin} \psi_D \operatorname{Cos} p t' \sqrt{2(h-\alpha)} + \operatorname{Cos} \psi_D \sqrt{2\alpha} \operatorname{Cos} q t''), \\ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_D &= \Xi \operatorname{Cos} \psi_D \frac{\operatorname{Sin} p t'}{p \sqrt{2(h-\alpha)}} + H \operatorname{Sin} \psi_D \frac{\operatorname{Sin} p t'}{p \sqrt{2(h-\alpha)}}. \end{aligned}$$

De  $(\ )_D$  veranderingen van een element zijn, (zie de waarden van  $a$ ,  $b$  in (93) en (94)) omdat  $A_D$ ,  $B_D$ ,  $A_D$ , en  $B_D$ , van de tweede orde gesteld zijn, van de tweede orde ten opzichte van dit element.

Wij kunnen dus weer als in § 2 de middenwaarde van de  $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_D$  over verscheidene slingeringen, of bij passend gekozen  $\lambda$  en  $\lambda'$

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\lambda'}^{\lambda'+\lambda} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_D dt = \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_D,$$

nemen en daarbij de elementen onder 't integraalteeken onafhankelijk van den tijd stellen. Wij ontbinden dus  $p't'$  en  $q't'$  in de coëfficiënten van  $\Xi$  en H in eene som van twee deelen in dier voege, dat een van deze deelen tevens in de cosinus in  $\Xi$  of H voorkomt; en schrijven zoo bijv. voor

$$\Xi \sin p't' = \Xi (\sin(p't' - f) \cos f + \cos(p't' - f) \sin f),$$

$$H \cos q't' = H (\cos(p't' - g) \cos(g + T_0) - \sin(p't' - g) \sin(g + T_0)),$$

waar gedurende ettelijke slingeringen  $f$ ,  $g$ ,  $T_0$  onveranderlijk gesteld mogen worden.

Daar in  $\Xi$  en H slechts  $\cos(p't' - f)$  en  $\sqrt{\cos^2(p't' - f)}$ , respectievelijk  $\cos(p't' - g)$  en  $\sqrt{\cos^2(p't' - g)}$  voorkomen, behoeft voor de middelwaarde van  $\Xi \sin p't'$  bijv. slechts  $\Xi \cos(p't' - f) \sin f$  in aanmerking genomen te worden. Te bepalen zijn dus de middelwaarden, (die wij met een horizontale streep aanduiden),

$$\overline{\Xi \cos(p't' - f)} = - (A_D a \overline{\cos^2(p't' - f)} + A_D' a^2 \overline{\cos^2(p't' - f) \sqrt{\cos^2(p't' - f)}}),$$

$$\overline{H \cos(p't' - g)} = - (B_D b \overline{\cos^2(p't' - g)} + B_D' b^2 \overline{\cos^2(p't' - g) \sqrt{\cos^2(p't' - g)}}),$$

wanneer wij met de ontwikkeling van (98) tot de tweede machten der snelheden gaan.

De middelwaarden van  $\cos^2(p't' - \mu)$  en  $\cos^2(p't' - \mu) \sqrt{\cos^2(p't' - \mu)}$  vindt men uit

$$\frac{2p}{\pi} \int_{\frac{\mu}{p}}^{\frac{\pi}{2p} + \frac{\mu}{p}} \cos^2(p't' - \mu) dt' = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2p}{\pi} \int_{\frac{\mu}{p}}^{\frac{\pi}{2p} + \frac{\mu}{p}} \cos^2(p't' - \mu) \sqrt{\cos^2(p't' - \mu)} dt' = \frac{4}{3\pi}.$$

Dus is

$$\overline{\Xi \cos(p't' - f)} = -\frac{a}{2} (A_D + \frac{8}{3\pi} a A_D'),$$

$$\overline{\text{H Cos}(p't' - g)} = -\frac{b}{2} (B_D + \frac{8}{3\pi} b B_D')$$

Hieruit blijkt ook hoe de voorgaande beschouwingen uitgebreid kunnen worden tot meer termen van de reeks (93<sup>a</sup>).

Is een van deze bijv.

$$-\sqrt{A_0} A_D^{(n)} \frac{d\nu}{dt} \sqrt{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2},$$

zoo komt daardoor in  $\overline{\text{E Cos}(p't' - f)}$

nog  $-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n+1)}{2 \cdot 4 \dots (n+2)} a^{(n+1)} A_D^{(n)}$  voor  $n$  even

of  $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n+1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n+2)} a^{n+1} A_D^{(n)}$  voor  $n$  oneven

bij  $A_D$  en hiermede is in 't algemeen aangegeven, hoe men uit de  $\left(\frac{d}{dt}\right)_D$  der elementen, wanneer de wrijving zuiver evenredig is aan de amplituden, die verkrijgen kan, welke plaats vinden wanneer er buitendien enkele of eene reeks van hoogere machten in de ontwikkeling van de wrijvingsvertragingen naar de snelheden voorkomen. Dan toch moet men in plaats van  $A_D$  en  $B_D$  eene reeks te stellen, die respectievelijk naar de machten der  $a$  en  $b$  opklimt. Laten wij dus de berekening voor het eenvoudige geval,

$$\overline{\text{E Cos}(p't' - f)} = -\frac{1}{2} A_D a, \quad \overline{\text{H Cos}(p't' - g)} = -\frac{1}{2} B_D b,$$

voortzetten en dan later, door de gevonden reeksen voor  $A_D$  en  $B_D$  in de plaats te stellen, tot het algemeene geval overgaan.

Dan komt, daar  $p = q$  gesteld mag worden,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_D &= -\frac{B_D}{2} b \text{Cos} \psi_D \sqrt{2\alpha} \text{Cos}(T_0 + g) + \frac{A_D}{2} a \text{Sin} \psi_D \sqrt{2\alpha} \text{Cos}(T_0 + f), \\ \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_D &= \frac{A_D}{2p} a (\sqrt{2\alpha} \text{Cos} \psi_D \text{Sin} f + \\ &\quad + \sqrt{2(h-\alpha)} \text{Sin} \psi_D \text{Sin}(f + T_0)) \frac{1}{2\sqrt{\alpha(h-\alpha)}} - \\ &- \frac{B_D}{2p} b (-\sqrt{2\alpha} \text{Sin} \psi_D \text{Sin} g + \sqrt{2(h-\alpha)} \text{Cos} \psi_D \text{Sin}(g + T_0)) \frac{1}{2\sqrt{\alpha(h-\alpha)}}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_D = -\frac{A_D}{2} a (\cos \psi_D \cos f \sqrt{2(h-a)} - \sin \psi_D \sqrt{2a} \cos(f+T_0)) - \\ - \frac{B_D}{2} b (\sin \psi_D \cos g \sqrt{2(h-a)} + \cos \psi_D \sqrt{2a} \cos(g+T_0)),$$

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_D = -\left[\frac{A_D}{2p} a \cos \psi_D \sin f + \frac{B_D}{2p} b \sin \psi_D \sin g\right] \frac{1}{\sqrt{2(h-a)}}.$$

Met

$$a \cos f = \sqrt{2(h-a)} \cos \psi_D - \sqrt{2a} \sin \psi_D \cos T_0,$$

$$a \sin f = \sqrt{2a} \sin \psi_D \sin T_0,$$

$$b \cos g = \sqrt{2(h-a)} \sin \psi_D + \sqrt{2a} \cos \psi_D \cos T_0,$$

$$b \sin g = -\sqrt{2a} \cos \psi_D \sin T_0,$$

$$a \sin(f+T_0) = \sqrt{2(h-a)} \cos \psi_D \sin T_0,$$

$$a \cos(f+T_0) = \sqrt{2(h-a)} \cos \psi_D \cos T_0 - \sqrt{2a} \sin \psi_D,$$

$$b \sin(g+T_0) = \sqrt{2(h-a)} \sin \psi_D \sin T_0,$$

$$b \cos(g+T_0) = \sqrt{2(h-a)} \sin \psi_D \cos T_0 + \sqrt{2a} \cos \psi_D;$$

volgens (93) en (94) en met  $a' = \frac{a}{h}$  wordt

$$\left(\frac{dT_0}{dt}\right)_D = \left(-p \frac{d\beta}{dt}\right)_D = \frac{B_D - A_D}{4} \frac{\sin 2\psi_D \sin T_0}{\sqrt{a'(1-a')}}}, \dots (102)$$

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_D = \frac{B_D - A_D}{4p} \frac{\sin T_0 \sqrt{a'}}{\sqrt{a'(1-a')}} \sin 2\psi_D, \dots (103)$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_D = -\frac{A_D}{2} a^2 - \frac{B_D}{2} b^2 = -\frac{A_D + B_D}{2} h -$$

$$-\frac{(A_D - B_D)h}{2} \left\{ (1 - 2a') \cos 2\psi_D - 2 \sin 2\psi_D \cos T_0 \sqrt{a'(1-a')} \right\},$$

of

$$\left(\frac{d \lg h}{dt}\right)_D = -\frac{A_D + B_D}{2} - \frac{A_D - B_D}{2} \left\{ (1 - 2a') \cos 2\psi_D - \right. \\ \left. - 2 \sin 2\psi_D \cos T_0 \sqrt{a'(1-a')} \right\}; \quad (104)$$

en eindelijk

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)_0 &= \frac{1}{h^2} \left( h \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{dh}{dt} \right) = -\frac{B_0}{2} \left( \sqrt{2(1-\alpha')} \sin \psi_0 \cos T_0 + \right. \\
 &+ \sqrt{2\alpha'} \cos \psi_0 \cos \psi_0 \sqrt{2\alpha'} + \frac{A_0}{2} \left( \sqrt{2(1-\alpha')} \cos \psi_0 \cos T_0 - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sqrt{2\alpha'} \sin \psi_0 \right) \sin \psi_0 \sqrt{2\alpha'} + \frac{A_0 + B_0}{2} \alpha' + \right. \\
 &+ \alpha' \frac{A_0 - B_0}{2} \left\{ (1-2\alpha) \cos 2\psi_0 - 2 \sin 2\psi_0 \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \right\}, \\
 \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)_0 &= \frac{(A_0 - B_0)}{2} \left\{ 2\alpha'(1-\alpha') \cos 2\psi_0 + \right. \\
 &\quad \left. + (1-2\alpha') \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin 2\psi_0 \right\},
 \end{aligned} \right\} (105)$$

In deze formules, die gelden voor 't geval, dat de wrijving juist evenredig met de snelheden is, moet overal voor

$$\left. \begin{aligned}
 A_0, & \quad A_0 + \frac{8a}{3\pi} A'_0, \\
 B_0, & \quad B_0 + \frac{8b}{3\pi} B'_0,
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (106)$$

en voor

geschreven worden, wanneer men nog op den invloed van de tweede macht der snelheden op de wrijving letten wil, wat bij onzen slinger noodzakelijk is.

§ 6. *De storingen in de elementen  $\varepsilon$  en  $\delta$  van de beweging bij oneindig kleine amplituden en zonder wrijving.*

De bewegingen van den slinger zijn nu volledig bekend, wanneer men de elementen  $\alpha'$ ,  $h$ ,  $T_0$ ,  $\tau$  als functien van den tijd zoo bepaalt, dat hunne differentiaalquotienten de waarden hebben, die uit (51) (91) en (102) (106) gezamentlijk volgen, dus bijv.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha'}{dt} &= \frac{1}{h} \frac{\partial S}{\partial \beta} + \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)_0 = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial S_{\Omega}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial S_A}{\partial \beta} \right) + \\
 &+ \frac{1}{h} \left( \frac{\partial S_{\psi}}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{\partial S_U}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)_0.
 \end{aligned}$$

Wanneer men alleen lette op  $S_{\Omega}$  zouden volgens § 4 van dit Hoofdstuk en volgens de grondformulen (A) en (B), van 't 1<sup>e</sup> Stuk, bij

$$\gamma = \Omega'$$

$\alpha'$  en  $T_0$  zulke functiën van den tijd zijn, dat

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2\alpha' &= \cos \varepsilon \cos \psi' + \sin \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta), \\ 2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \cos T_0 &= \sin \varepsilon \sin 2(D + \delta) \\ A &= \cos \varepsilon \sin \psi' - \cos \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta) = \left[ \pm \right]^r \frac{\cos \psi}{\cos \psi'} \sqrt{A^2}. \end{aligned} \right\} (107)$$

is, waar  $\varepsilon$  en  $\delta$  willekeurige standvastigen zijn, die uit den aanvankelijken toestand bepaald moeten worden.

Wanneer men nu ook de

$$\left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_A, \quad \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_D, \quad \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_U, \quad \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_A, \quad \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_D, \quad \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_U,$$

in aanmerking neemt, kan men aan de differentiaalvergelijkingen voldoen door  $\varepsilon$  en  $\delta$  als functiën van den tijd, in plaats van als standvastigen te beschouwen.

Stelt men

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt} &= A + X, & \frac{dT_0}{dt} &= B + Y, \\ \text{en} \\ X &= \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_A + \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_\psi + \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_D + \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_U, \\ Y &= \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_A + \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_\psi + \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_D + \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_U, \end{aligned} \right\} (108)$$

zoo voldoen (107) aan de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\alpha'}{dt} = A, \quad \frac{dT_0}{dt} = B,$$

wanneer  $\varepsilon$  en  $\delta$  standvastig zijn. Zullen zij aan (108) voldoen, zoo moet

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} = X,$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial T_0}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} = Y$$

zijn; en wanneer men

$$\nabla = \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon} \frac{\partial T_0}{\partial \delta} - \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta} \frac{\partial T_0}{\partial \varepsilon} \dots \dots \dots (109)$$

stelt,

$$\left. \begin{aligned} \nabla \frac{d\varepsilon}{dt} &= X \frac{\partial T_0}{\partial \delta} - Y \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta}, \\ \nabla \frac{d\delta}{dt} &= -X \frac{\partial T_0}{\partial \varepsilon} + Y \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

Eerst moet men dus de gedeeltelijke differentiaalquotienten

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta}, \frac{\partial T_0}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial T_0}{\partial \delta} \text{ en } \nabla \text{ bepalen.}$$

Uit

$$1 - 2\alpha' = \text{Cos } \psi' \text{ Cos } \varepsilon + \text{Sin } \psi' \text{ Sin } \varepsilon \text{ Cos } 2(D + \delta),$$

volgt

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{Cos } \psi' \text{ Sin } \varepsilon - \text{Sin } \psi' \text{ Cos } \varepsilon \text{ Cos } 2(D + \delta)), \quad (111)$$

en

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \delta} = \text{Sin } \psi' \text{ Sin } \varepsilon \text{ Sin } 2(D + \delta), \dots \dots \dots (112)$$

waarvoor men soms met voordeel

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \delta} = 2 \text{Sin } \psi' \text{ Cos } T_0 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')}$$

schrijven kan.

Uit

$$2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{ Cos } T_0 = \text{Sin } \varepsilon \text{ Sin } 2(D + \delta),$$

$$\frac{1 - 2\alpha'}{\sqrt{\alpha'(1 - \alpha')}} \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon} \text{ Cos } T_0 - 2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{ Sin } T_0 \frac{\partial T_0}{\partial \varepsilon} = \text{Cos } \varepsilon \text{ Sin } 2(D + \delta),$$

$$\frac{1 - 2\alpha'}{\sqrt{\alpha'(1 - \alpha')}} \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta} \text{ Cos } T_0 - 2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{ Sin } T_0 \frac{\partial T_0}{\partial \delta} = 2 \text{Sin } \varepsilon \text{ Cos } 2(D + \delta),$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \varepsilon} = - \frac{\text{Cos } \varepsilon \text{ Sin } 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{ Sin } T_0} + \frac{(1 - 2\alpha') \text{ Cos } T_0}{2 \alpha'(1 - \alpha')} \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon}, \quad (113)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \delta} = - \frac{2 \text{Sin } \varepsilon \text{ Cos } 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{ Sin } T_0} + \frac{(1 - 2\alpha') \text{ Cos } T_0}{2 \alpha'(1 - \alpha')} \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta}. \quad (114)$$

Dus

$$\begin{aligned} \nabla &= - \frac{2 \text{Sin } \varepsilon \text{ Cos } 2(D + \delta) \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon} - \text{Cos } \varepsilon \text{ Sin } 2(D + \delta) \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta}}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{ Sin } T_0} \\ &= - \frac{\text{Sin } \varepsilon \text{ Cos } 2(D + \delta) (\text{Sin } \varepsilon \text{ Cos } \psi' - \text{Sin } \psi' \text{ Cos } \varepsilon \text{ Cos } 2(D + \delta))}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \text{ Sin } T_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos \varepsilon \sin^2 2(D + \delta) \sin \psi' \sin \varepsilon}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \sin T_0} = \\ &= \frac{\cos \varepsilon \sin \psi' - \cos \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \sin T_0} \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Volgens de in 't 1<sup>e</sup> Stuk ontwikkelde formules ((109), (121) en (B)) is echter

$$2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \sin T_0 = \frac{\cos \psi}{\cos \psi'} (\cos \varepsilon \sin \psi' - \cos \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta)); \quad (115)$$

dus

$$\nabla = \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \sin \varepsilon. \quad \dots \dots \dots (116)$$

Wij bepalen nu die termen van  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  en  $\frac{d\delta}{dt}$ , die afkomstig zijn van de wrijving. Eerst nemen wij in (108) volgens (105)

$$X = (A_0 - B_0) \cos 2\psi_0 \alpha'(1 - \alpha') \quad Y = 0,$$

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{01} &= \frac{A_0 - B_0}{4} \cos 2\psi_0 \cdot 4\alpha'(1 - \alpha') \left( -\frac{2 \sin \varepsilon \cdot \cos 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \sin T_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - 2\alpha') \cos T_0}{2\alpha'(1 - \alpha') \sin T_0} \sin \psi' \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin 2(D + \delta) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{01} &= \frac{B_0 - A_0}{4} \cos 2\psi_0 \cdot 4\alpha'(1 - \alpha') \left( -\frac{\cos \varepsilon \cdot \sin 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \sin T_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - 2\alpha') \cos T_0}{4\alpha'(1 - \alpha') \sin T_0} (\cos \psi' \cdot \sin \varepsilon - \sin \psi' \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos 2(D + \delta)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{01} &= \frac{A_0 - B_0}{4} \cos 2\psi_0 \frac{(-2 \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta) \cdot 4\alpha'(1 - \alpha'))}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \sin T_0} + \\ &\quad + \frac{4(1 - 2\alpha') \cdot \cos T_0 \sin \psi' \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin 2(D + \delta) \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')}}{2 \sqrt{\alpha'(1 - \alpha')} \sin T_0}; \end{aligned}$$

hierin is

$$\begin{aligned} () &= -2 \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta) (1 - \cos^2 \psi' \cos \varepsilon - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \psi' \cos^2 2(D + \delta) - \\ &\quad - 2 \sin \psi' \sin \varepsilon \cos \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta)) + \\ &+ 2 (\cos \psi' \cos \varepsilon + \sin \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta)) \sin \psi' \sin^2 \varepsilon \sin^2 2(D + \delta) = \\ &= 2 \sin \varepsilon (\cos 2(D + \delta) (\cos^2 \psi' \cos^2 \varepsilon - 1 + 2 \sin \psi' \sin \varepsilon \cos \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta)) + \\ &\quad + (\cos \psi' \cos \varepsilon + \sin \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta)) \sin \psi' \sin \varepsilon - \\ &\quad - \cos \psi' \cos \varepsilon \sin \psi' \sin \varepsilon \cos^2 2(D + \delta)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin \varepsilon \{ -\cos 2(D + \delta)(\cos^2 \psi' \sin^2 \varepsilon + \sin^2 \psi' \cos^2 \varepsilon) + \\
&+ \cos^2 2(D + \delta) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \psi' \cos \psi' + \cos \psi' \cos \varepsilon \sin \psi' \sin \varepsilon \} = \\
&= 2 \sin \varepsilon (\cos \psi' \sin \varepsilon - \sin \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta)) (\sin \psi' \cos \varepsilon - \\
&\quad - \cos \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \sin \varepsilon \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\text{BI}} &= -\frac{\sin \varepsilon}{2} (B_D - A_D) \cos 2\psi_D (\cos \psi' \sin \varepsilon - \\
&\quad - \sin \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta)) \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}},
\end{aligned}$$

$$\left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\text{BI}} = -\frac{B_D - A_D}{2} \cos 2\psi_D (\cos \psi' \sin \varepsilon - \sin \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta)). \quad (117)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{\text{BI}} &= \frac{B_D - A_D}{4} \cos 2\psi_D \cdot 4\alpha'(1-\alpha') \left( -\frac{\cos \varepsilon \sin 2(D + \delta)}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha') \sin T_0}} + \right. \\
&+ \left. \frac{(1-2\alpha') \cos T_0}{4\alpha'(1-\alpha') \sin T_0} (\cos \psi' \sin \varepsilon - \sin \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta)) \right) = \\
&= \frac{B_D - A_D}{4} \cos 2\psi_D \left\{ \frac{-\cos \varepsilon \sin 2(D + \delta) \cdot 4\alpha'(1-\alpha')}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha') \sin T_0}} + \right. \\
&+ \left. \frac{(1-2\alpha') \sin \varepsilon \cdot \sin 2(D + \delta) (\cos \psi' \sin \varepsilon - \sin \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta))}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha') \sin T_0}} \right\} = \\
&= \frac{B_D - A_D}{4} \cos 2\psi_D \frac{\sin 2(D + \delta)}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha') \sin T_0}} \{ \cos \varepsilon (\cos^2 \psi' \cos^2 \varepsilon - 1 + \\
&+ \sin^2 \psi' \sin^2 \varepsilon \cos^2 2(D + \delta) + 2 \sin \psi' \cos \psi' \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta) + \\
&+ \sin \varepsilon (\cos^2 \psi' \cos \varepsilon \sin \varepsilon - \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \sin \varepsilon \cos^2 2(D + \delta) + \\
&\quad + \sin \psi' \cos \psi' (\sin^2 \varepsilon - \cos^2 \varepsilon) \cos 2(D + \delta)) \} = \\
&= \frac{B_D - A_D}{4} \cos 2\psi_D \frac{\sin 2(D + \delta)}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha') \sin T_0}} \{ -\sin^2 \psi' \cos \varepsilon + \\
&\quad + \sin \psi' \cos \psi' \cos 2(D + \delta) \sin \varepsilon \} = \\
&= -\frac{B_D - A_D}{4} \cos 2\psi_D \sin 2(D + \delta) \sin \psi' \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}},
\end{aligned}$$

$$\text{en} \quad \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{\text{BI}} = \frac{A_D - B_D}{4} \cos 2\psi_D \frac{\sin 2(D + \delta) \sin \psi'}{\sin \varepsilon} \dots \quad (118)$$

Nu moet nog dat deel van den invloed der wrijving beschouwd worden, hetwelk

$$X = -\frac{B_D - A_D}{2} \cos T_0 (1 - 2\alpha') \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin 2\psi_D,$$

$$Y = \frac{B_D - A_D}{4} \sin 2\psi_D \frac{\sin T_0}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}}$$

geeft.

Hiervan zijn afkomstig  $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{DII}}$  en  $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_{\text{DII}}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{DII}} &= \frac{A_D - B_D}{2} \cos T_0 (1 - 2\alpha') \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin 2\psi_D \left( -\frac{2 \sin \varepsilon \cos (D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1-2\alpha') \cos^2 T_0}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} \sin \psi' \right) + \\ &\quad + \frac{A_D - B_D}{2} \sin 2\psi_D \frac{2 \sin^2 T_0}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} \sin \psi' \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} = \\ &= \frac{A_D - B_D}{2} \sin 2\psi_D \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \left\{ -\frac{\sin \varepsilon \cdot \cos 2(D + \delta)(1 - 2\alpha')}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - 2\alpha')^2 \cos^2 T_0 + \sin^2 T_0}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} \sin \psi' \right\}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \right\} = \left\{ -\sin \varepsilon \cos 2(D + \delta) (\cos \psi' \cos \varepsilon + \sin \psi' \sin \varepsilon \cos 2(D + \delta)) + \right. \\ \left. + \sin \psi' - \sin \psi' \sin^2 \varepsilon \sin^2 2(D + \delta) \right\} \frac{1}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} =$$

$$= \frac{2(-\sin \varepsilon \cos \psi' \cos 2(D + \delta) + \sin \psi' \cos \varepsilon) \cos \varepsilon}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} = 2 \cos \varepsilon \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}};$$

$$\text{dus} \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{DII}} = \frac{A_D - B_D}{2} \sin 2\psi_D \cos \varepsilon \sin 2(D + \delta) \dots \dots (119)$$

Eindelijk

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_{\text{DII}} &= \frac{B_D - A_D}{2} \cos T_0 (1 - 2\alpha') \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin 2\psi_D \left\{ -\frac{\cos \varepsilon \sin 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - 2\alpha') \cos T_0}{2 \alpha'(1-\alpha') \sin T_0} \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon} \right\} + \frac{B_D - A_D}{2} \sin 2\psi_D \frac{\sin^2 T_0}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon} = \\ &= -\frac{B_D - A_D}{2} \frac{2 \cos^2 T_0 (1 - 2\alpha') \alpha'(1-\alpha') \sin 2\psi_D}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0 \sin \varepsilon} + \\ &\quad + \frac{B_D - A_D}{4} \sin 2\psi_D \frac{1 - 4\alpha'(1-\alpha') \cos^2 T_0}{2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin T_0} (\cos \psi' \sin \varepsilon - \sin \psi' \cos \varepsilon \cos 2(D + \delta)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{B_D - A_D}{4} \text{Sin } 2\psi_D \frac{4 \text{Cos}^2 T_0 \alpha' (1 - \alpha')}{2 \sqrt{\alpha' (1 - \alpha')} \text{Sin } T_0} \left\{ (1 - 2\alpha') \frac{\text{Cos } \varepsilon}{\text{Sin } \varepsilon} + \right. \\
&\quad \left. + \text{Cos } \psi' \text{Sin } \varepsilon - \text{Sin } \psi' \text{Cos } \varepsilon \text{Cos } 2(D + \delta) \right\} + \\
&\quad + \frac{B_D - A_D}{4} \text{Sin } 2\psi_D \frac{\text{Cos } \psi' \text{Sin } \varepsilon - \text{Sin } \psi' \text{Cos } \varepsilon \text{Cos } 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha' (1 - \alpha')} \text{Sin } T_0}; \\
\left\{ \right\} &= \frac{1}{\text{Sin } \varepsilon} (\text{Cos}^2 \varepsilon \text{Cos } \psi' + \text{Cos } \varepsilon \text{Sin } \varepsilon \text{Sin } \psi' \text{Cos } 2(D + \delta) + \\
&\quad + \text{Cos } \psi' \text{Sin}^2 \varepsilon - \text{Sin } \psi' \text{Cos } \varepsilon \text{Sin } \varepsilon \text{Cos } 2(D + \delta)) = \frac{\text{Cos } \psi'}{\text{Sin } \varepsilon};
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
\nabla \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{\text{DII}} &= -\frac{B_D - A_D}{4} \text{Sin } 2\psi_D \left\{ \frac{\text{Sin } \varepsilon \text{Cos } \psi' \text{Sin}^2 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha' (1 - \alpha')} \text{Sin } T_0} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\text{Cos } \psi' \text{Sin } \varepsilon + \text{Sin } \psi' \text{Cos } \varepsilon \text{Cos } 2(D + \delta)}{2 \sqrt{\alpha' (1 - \alpha')} \text{Sin } T_0} \right\}; \\
\left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{\text{DII}} &= \frac{A_D - B_D}{4} \text{Sin } 2\psi_D \frac{\text{Cos } 2(D + \delta)}{\text{Sin } \varepsilon} \dots \dots (120)
\end{aligned}$$

Bij (117), (118), (119), (120) moet men buitendien nog letten op (106), terwijl  $\hbar$  volgens (104)

$$\left. \begin{aligned}
\hbar &= \hbar_0 e^{-\frac{A_D + B_D}{2} t - \frac{A_D - B_D}{2} \int [(1 - 2\alpha') \text{Cos } 2\psi_D - \\
&\quad - 2 \text{Cos } T_0 \sqrt{\alpha' (1 - \alpha')} \text{Sin } 2\psi_D] dt, \\
\text{of met } Ft &= -\frac{A_D + B_D}{2} t - \frac{A_D - B_D}{2} \int [(\text{Cos } \psi' \cdot \text{Cos } \varepsilon + \\
&\quad + \text{Sin } \psi' \text{Sin } \varepsilon \text{Cos } 2(D + \delta)) \text{Cos } 2\psi_D - \text{Sin } \varepsilon \text{Sin } 2(D + \delta) \text{Sin } 2\psi_D] dt,
\end{aligned} \right\} (121)$$

$$\hbar = \hbar_0 e^{-Ft} \dots \dots \dots (122)$$

wordt,

De ontwikkeling van  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  en  $\frac{d\delta}{dt}$  ten gevolge van  $S' = S_A + S_\psi + S_U$

kan in een meer sierlijken vorm worden uitgedrukt.

Daartoe make men in (110) gebruik van de formules (90), (91), (92) en van (51), die wegens

$$\left( \frac{d\hbar}{dt} \right)_{A, \psi, U} = \frac{\partial S'}{\partial \tau} = 0,$$

$$-\frac{1}{\hbar} \frac{\partial S'}{\partial \alpha'} = \left( \frac{d\beta}{dt} \right)_{A, \psi, U}, \quad \frac{\partial S'}{\partial \beta} = \hbar \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_{A, \psi, U},$$

of 
$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{\partial S'}{h \partial \alpha'}, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = -\frac{p}{h} \frac{\partial S'}{\partial T_0},$$

worden. Zij gaan dan over in

$$\begin{aligned} \nabla \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{p}{h} \frac{\partial S'}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial \delta} - \frac{p}{h} \frac{\partial S'}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta}, \\ \nabla \frac{d\delta}{dt} &= \frac{p}{h} \frac{\partial S'}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial \delta} + \frac{p}{h} \frac{\partial S'}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \varepsilon}; \end{aligned}$$

of in

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{p}{\nabla h} \cdot \frac{\partial S'}{\partial \varepsilon}, \quad -\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\nabla h} \cdot \frac{\partial S'}{\partial \delta}, \quad \dots \dots (125)$$

welke eene verrassende overeenkomst met (51) hebben.

Berekenen wij nu eerst  $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_U$  en  $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_U$ .

Daartoe moet men in (125) stellen

$$S' = -U_{\varphi\theta} \frac{h}{2M} \text{Sin } \varepsilon \text{ Sin } 2(D + \delta);$$

dus is met (116)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_U &= -\frac{p}{M} U_{\varphi\theta} \frac{\text{Cos } \psi}{\text{Cos } \psi'}, \text{Cos } 2(D + \delta), \\ \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_U &= \frac{\text{Cos } \psi}{\text{Cos } \psi'} \frac{p}{2M} U_{\varphi\theta} \text{Cotg } \varepsilon \text{ Sin } 2(D + \delta). \end{aligned} \right\} (126)$$

Wanneer wij overeenkomstig (121)  $h = h_0 e^{-Ft}$  invoeren, wordt

$$\begin{aligned} S_A + S_\psi &= h \left[ -\frac{1}{16} \frac{h_0}{M} + \mu_1 \cdot 4 \text{Sin}^2 T_0 \alpha' (1 - \alpha') - 4 \mu_2 \alpha' (1 - \alpha') - \right. \\ &\quad \left. - \mu_2 \{ 1 - 4 \alpha' (1 - \alpha') - 4 \alpha' (1 - \alpha') \text{Cos}^2 T_0 \} \text{Sin}^2 2\psi_D - \right. \\ &\quad \left. - \mu_2 \cdot 2 \text{Cos } T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} (1 - 2\alpha') \text{Sin } 4\psi_D \right] e^{-Ft}, \end{aligned}$$

stellende

$$\mu_1 = \frac{3P - 2R}{16MP} h_0, \quad \mu_2 = \frac{R h_0}{16MP} \dots \dots \dots (127)$$

Dus

$$\begin{aligned} S_A + S_\psi &= h \left[ -\frac{1}{16} \frac{h_0}{M} - \mu_2 + \mu_1 (\text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Sin } \psi' - \text{Cos } \psi' \cdot \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Cos } 2(D + \delta))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D (\text{Cos } \varepsilon \text{Cos } \psi' + \text{Sin } \psi' \text{Sin } \varepsilon \text{Cos } 2(D + \delta))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu_2 \text{Sin}^2 2\psi_D \text{Sin}^2 \varepsilon \text{Sin}^2 2(D + \delta) - \mu_2 \text{Sin } 4\psi_D (\text{Cos } \varepsilon \text{Cos } \psi' + \right. \\ &\quad \left. + \text{Sin } \varepsilon \text{Sin } \psi' \text{Cos } 2(D + \delta)) \text{Sin } \varepsilon \text{Sin } 2(D + \delta) \right] e^{-Ft}. \end{aligned}$$

Dit kan men in den vorm

$$S_{\psi} + S_{\Lambda} = h [\Sigma_{00} + \Sigma_0 + \Sigma_1 \text{Cos } 2p_{\delta} + \Sigma_2 \text{Sin } 2p_{\delta} + \Sigma_3 \text{Cos } 4p_{\delta} + \Sigma_4 \text{Sin } 4p_{\delta}] e^{-Ft}$$

brengen, ter afkorting voor  $D + \delta$  schrijvende  $p_{\delta}$  en stellende

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{00} &= -\frac{1}{\Gamma_6} h_0 - \mu_2, \\ \Sigma_0 &= (\mu_1 \text{Sin}^2 \psi' + \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D \text{Cos}^2 \psi') \text{Cos}^2 \varepsilon + \\ &\quad + (\mu_2 \text{Sin}^2 2\psi_D + \frac{1}{2} \mu_1 \text{Cos}^2 \psi' + \frac{1}{2} \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D \text{Sin}^2 \psi' - \\ &\quad \quad - \frac{1}{2} \mu_2 \text{Sin}^2 2\psi_D) \text{Sin}^2 \varepsilon, \\ \Sigma_1 &= \frac{1}{2} (-\mu_1 + \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D) \text{Sin } 2\psi' \cdot \text{Sin } 2\varepsilon, \\ \Sigma_2 &= -\frac{1}{2} \mu_2 \text{Sin } 4\psi_D \text{Cos } \psi' \cdot \text{Sin } 2\varepsilon, \\ \Sigma_3 &= \frac{1}{2} (\mu_1 \text{Cos}^2 \psi' + \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D \text{Sin}^2 \psi' - \mu_2 \text{Sin}^2 2\psi_D) \text{Sin}^2 \varepsilon, \\ \Sigma_4 &= -\frac{1}{2} \mu_2 \text{Sin } 4\psi_D \text{Sin } \psi' \cdot \text{Sin}^2 \varepsilon. \end{aligned} \right\} (128)$$

Volgens (125) wordt dan

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_{\Lambda, \psi} = -\frac{2p \text{Cos } \psi}{\text{Cos } \psi' \cdot \text{Sin } \varepsilon} \left( -\Sigma_1 \text{Sin } 2p_{\delta} + \Sigma_2 \text{Cos } 2p_{\delta} - \right. \\ \left. - 2\Sigma_3 \text{Sin } 4p_{\delta} + 2\Sigma_4 \text{Cos } 4p_{\delta} \right) e^{-Ft} \dots \dots (129)$$

$$\left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{\Lambda, \psi} = \frac{p \text{Cos } \psi}{\text{Cos } \psi' \cdot \text{Sin } \varepsilon} \left( \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \varepsilon} \text{Cos } 2p_{\delta} + \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \varepsilon} \text{Sin } 2p_{\delta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Sigma_3}{\partial \varepsilon} \text{Cos } 4p_{\delta} + \frac{\partial \Sigma_4}{\partial \varepsilon} \text{Sin } 4p_{\delta} \right) e^{-Ft} \dots \dots (130)$$

### § 7. Benaderde integralen van de storingsvergelijkingen van § 6.

Eene eerste benadering tot de waarden van  $\varepsilon$  en  $\delta$ , die bij mijne proeven slechts weinig veranderden (omdat  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $B_D - A_D$  en  $U_{\psi\theta}$  zeer klein waren), vindt men nu door in

$$\varepsilon = \int \frac{d\varepsilon}{dt} dt = \int \left[ \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\Lambda, \psi} + \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{D. I} + \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{D. II} + \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_U \right] dt,$$

$$\delta = \int \frac{d\delta}{dt} dt = \int \left[ \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{\Lambda, \psi} + \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{D. I} + \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{D. II} + \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_U \right] dt,$$

$\varepsilon$  en  $\delta$  onder het integraalteeken aan de rechterzijde als standvastig te beschouwen. Wenscht men de benadering tot de waarden van  $\varepsilon$  en  $\delta$  op een bepaald oogenblik uit die, welke op een ander tijdstip

gegeven zijn, verder voort te zetten, zoo kan men op dezelfde wijze te werk gaan, door, nadat men den tusschentijd in een overeenkomstig aantal kortere intervallen verdeeld heeft, gedurende elk van deze aan  $\varepsilon$  en  $\delta$  de waarden toe te schrijven, die zij bij het begin er van blijken te hebben. Voor ons doel is echter eene eerste benadering voldoende. Hierbij zullen wij ook nog  $A_D$  en  $B_D$  nul stellen, daar hun invloed slechts door mechanische quadraturen gevonden kan worden.

Volgens (117), (118), (119), (120), (126), (129) en (130) vinden wij dan

$$\varepsilon = a_D t + (b_D + b_U) \sin 2(D + \delta) + c_D \cos 2(D + \delta) + \Sigma'_1 I_i + \Sigma'_2 C_i + \Sigma'_3 A_i + \Sigma'_4 B_i, \dots \dots \dots (131)$$

$$\delta = b'_D \sin 2(D + \delta) + (c'_D + c'_U) \cos 2(D + \delta) + \Sigma''_0 G_i + \Sigma''_1 C_i + \Sigma''_2 I_i + \Sigma''_3 B_i + \Sigma''_4 A_i, \dots (132)$$

waar

$$\left. \begin{aligned} a_D &= \frac{A_D - B_D}{2} \cos 2\psi_D \cos \psi' \sin \varepsilon, \\ b_D &= \frac{A_D - B_D}{4\Omega'} \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \cos 2\psi_D, \quad b_U = \frac{p}{M} \frac{U' \sin \theta}{2\Omega'} \cos \psi \operatorname{Tg} \psi', \\ c_D &= \frac{A_D - B_D}{4\Omega'} \sin 2\psi_D \sin \psi' \cos \varepsilon, \\ b'_D &= \frac{B_D - A_D}{8\Omega'} \sin 2\psi_D \frac{\sin^2 \psi'}{\sin \varepsilon}, \\ c'_D &= \frac{A_D - B_D}{8\Omega'} \cos 2\psi_D \frac{\sin \psi'}{\sin \varepsilon}, \quad c'_U = \frac{p}{2M} \frac{U' \sin \theta}{2\Omega'} \cos \psi \operatorname{Tg} \psi' \operatorname{Cotg} \varepsilon; \end{aligned} \right\} \dots (133)$$

verder

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \int e^{-Ft} \sin 4(D + \delta) dt, \quad B_i = \int e^{-Ft} \cos 4(D + \delta) dt, \\ C_i &= \int e^{-Ft} \cos 2(D + \delta) dt, \quad I_i = \int e^{-Ft} \sin 2(D + \delta) dt, \\ G_i &= \int e^{-Ft} dt; \end{aligned} \right\} \dots (134)$$

en eindelijk

$$\left. \begin{aligned} \Sigma'_1 &= 4p \cos \psi \sin \psi' (-\mu_1 + \mu_2 \cos^2 2\psi_D) \cos \varepsilon, \\ \Sigma'_2 &= 2p \cos \psi \mu_2 \sin 4\psi_D \cos \varepsilon, \\ \Sigma'_3 &= 2p \frac{\cos \psi}{\cos \psi'} (\mu_1 \cos^2 \psi' + \mu_2 \cos^2 2\psi_D \sin^2 \psi' - \mu_2 \sin^2 2\psi_D) \sin \varepsilon, \\ \Sigma'_4 &= 2p \cos \psi \operatorname{Tg} \psi' \mu_2 \sin 4\psi_D \sin \varepsilon, \end{aligned} \right\} \dots (135)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma''_0 &= 2p \frac{\text{Cos } \psi}{\text{Cos } \psi'} \left\{ -\mu_1 \text{Sin}^2 \psi' - \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D \text{Cos}^2 \psi' + \mu_2 \text{Sin}^2 2\psi_D + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \mu_1 \text{Cos}^2 \psi' + \frac{1}{2} \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D \text{Sin}^2 \psi' - \frac{1}{2} \mu_2 \text{Sin}^2 2\psi_D \right\} \text{Cos } \varepsilon, \\
 \Sigma''_1 &= p \frac{\text{Cos } \psi}{\text{Cos } \psi'} \text{Sin} 2\psi' (-\mu_1 - \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D) \frac{\text{Cos } 2\varepsilon}{\text{Sin } \varepsilon}, \\
 \Sigma''_2 &= -p \mu_2 \text{Sin} 4\psi_D \text{Cos } \psi \frac{\text{Cos } 2\varepsilon}{\text{Sin } \varepsilon}, \\
 \Sigma''_3 &= p \frac{\text{Cos } \psi}{\text{Cos } \psi'} (\mu_1 \text{Cos}^2 \psi' + \mu_2 \text{Cos}^2 2\psi_D \text{Sin}^2 \psi' - \\
 &\quad - \mu_2 \text{Sin}^2 2\psi_D) \text{Cos } \varepsilon, \\
 \Sigma''_4 &= -p \text{Cos } \psi \text{Tg } \psi' \mu_2 \text{Sin} 4\psi_D \text{Cos } \varepsilon.
 \end{aligned} \right\} (135)$$

Volgens (121) kan men in eerste benadering schrijven

$$h = h_0 e^{-F_0 t} \left\{ 1 - \frac{A_D - B_D}{2} \int \left[ \text{Sin } \psi' \text{Cos} 2\psi_D \text{Cos} 2(D + \delta) - \text{Sin} 2\psi_D \text{Sin} 2(D + \delta) \right] \text{Sin } \varepsilon dt \right\},$$

$$\text{waar } F_0 = \frac{A_D + B_D}{2} + \frac{A_D - B_D}{2} \text{Cos } \varepsilon \text{Cos } \psi' \text{Cos} 2\psi_D \dots (136)$$

het gemiddelde decrement gedurende eene geheele periode is, of met

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{A_D - B_D}{4\Omega'} \text{Sin}^2 \psi' \text{Sin } \varepsilon \text{Cos} 2\psi_D, \\
 \lambda_2 &= \frac{A_D - B_D}{4\Omega'} \text{Sin } \psi' \text{Sin } \varepsilon \text{Sin} 2\psi_D,
 \end{aligned} \right\} \dots (137)$$

$$h = h_0 e^{-F_0 t} \left\{ 1 + \lambda_1 \text{Sin} 2(D + \delta) + \lambda_2 \text{Cos} 2(D + \delta) \right\} \dots (138)$$

Volgens (134) en gebruik makende van de schrijfwijze

$$S_m = \int e^{-F_0 t} \text{Sin } m(D + \delta) dt, \quad K_m = \int e^{-F_0 t} \text{Cos } m(D + \delta) dt,$$

worden de integralen

$$\left. \begin{aligned}
 A_t &= \frac{\lambda_2}{2} S_2 + \frac{\lambda_1}{2} K_2 + S_4 + \frac{\lambda_2}{2} S_6 - \frac{\lambda_1}{2} K_6, \\
 B_t &= -\frac{\lambda_1}{2} S_2 + \frac{\lambda_2}{2} K_2 + K_4 + \frac{\lambda_1}{2} S_6 + \frac{\lambda_2}{2} K_6, \\
 C_t &= K_2 + \frac{\lambda_1}{2} S_4 + \frac{\lambda_2}{2} K_4 + \frac{\lambda_2}{2} K_6, \\
 I_t &= S_2 + \frac{\lambda_2}{2} S_4 + \frac{\lambda_1}{2} K_6 - \frac{\lambda_1}{2} K_4, \\
 G_t &= K_0 + \lambda_1 S_2 + \lambda_2 K_2;
 \end{aligned} \right\} (139)$$

terwijl

$$S_m = e^{-F_0 t} \frac{-F_0 \operatorname{Sin} m(D + \delta) + \frac{m \Omega'}{\operatorname{Sin} \psi'} \operatorname{Cos} m(D + \delta)}{F_0^2 + \left(\frac{m \Omega'}{\operatorname{Sin} \psi'}\right)^2},$$

$$K_n = e^{-F_0 t} \frac{-F_0 \operatorname{Cos} m(D + \delta) - \frac{m \Omega'}{\operatorname{Sin} \psi'} \operatorname{Sin} m(D + \delta)}{F_0^2 + \left(\frac{m \Omega'}{\operatorname{Sin} \psi'}\right)^2}.$$

## HOOFDSTUK II.

TOEPASSING VAN DE AFGELEIDE FORMULEN OP DE AFWIJKINGEN  
BIJ DE SLINGERPROEVEN VOLGENS MIJNE METHODE.

Wanneer bij den gebruikten slinger  $Tg\psi' < 1$  of volgens § 4 van Hoofdst. I

$$1 < \frac{\pi}{2T, \Omega'} \sqrt{\left(\frac{B_0 - A_0}{B_0} + \frac{M' - M}{M}\right)^2},$$

(vergelijk 126 van 't 1<sup>e</sup> Stuk) maakt en hem dan aanvankelijk in zulk een azimuth in vlakke slingeren brengt, dat

$$\operatorname{Cos}^2 2X_0 > Tg^2 \psi',$$

zoo verkrijgt men volgens § 4, afgezien van de storingen tengevolge van de eindige amplituden, de wrijving en den drager, bewegingsverschijnselen van de klasse B. II (zie (144) van 't 1<sup>e</sup> Stuk), uit welke men volgens n<sup>o</sup>. 38 van 't 1<sup>e</sup> Stuk de draaiing der aarde bewijzen en berekenen kan.

Met het oog op deze methode zullen wij nagaan tot welke wijzigingen  $\Delta T_1$ , en  $\Delta T_2$  in den duur van de eerste onderperiode en van de geheele periode,  $\Delta X_1$ , en  $\Delta X_2$  in het azimuth van de vlakke slingeren aan 't einde van de eerste en tweede onderperiode en  $\Delta \chi_1$ ,  $\Delta \chi_2$  in de maximumwaarden van den ellipticiteitshoek in de eerste en tweede onderperioden de berekende veranderingen in  $\varepsilon$  en  $\delta$  aanleiding geven.

§ 1. *Discussie van de verandering in vorm en ligging der slingeringskrommen tengevolge van de verandering der elementen.*

[1] Het einde van eene ongestoorde onderperiode wordt bepaald door de waarde van  $(D + \delta)$ , die voldoet aan de vergelijking (134) van 't 1<sup>e</sup> Stuk.

Wanneer aan deze vergelijking bij eene toename van  $\delta$  om  $\Delta \delta$  en van  $\varepsilon$  om  $\Delta \varepsilon$  wederom voldaan zal worden moet er nog zooveel tijd verlopen, dat

$$\Delta(D + \delta) = \frac{Tg \psi'}{2 \sin^2 \varepsilon} \frac{\Delta \varepsilon}{\sin 2(D + \delta)} \dots \dots \dots (140)$$

Daaruit volgt met (119 van 't 1<sup>e</sup> Stuk) en

$$\Delta D = \Delta(D + \delta) - \Delta \delta,$$

voor den tijd, die nog verlopen moet,

$$\Delta t = - \frac{\sin \psi'}{\Omega'} \left( \frac{Tg \psi' \Delta \varepsilon}{2 \sin^2 \varepsilon \sin 2(D + \delta)} - \Delta \delta \right).$$

Dus wordt

$$\Delta T_1 = \frac{\sin \psi'}{\Omega'} \left( \frac{Tg \psi' \Delta \varepsilon_1}{2 \sin 2 X_0 \sin \varepsilon} + \Delta \delta_1 \right) \dots \dots \dots (141)$$

$$\Delta T_2 = - \frac{\sin \psi'}{\Omega'} \left( \frac{Tg \psi' \Delta \varepsilon_2}{2 \sin 2 X_0 \sin \varepsilon} - \Delta \delta_2 \right) \dots \dots \dots (142)$$

wanneer  $\sin 2(D + \delta)$  in deze gevallen niet te klein is en dus voor  $\sin 2(D + \delta)$  in de gestoorde beweging ter berekening van de verbeteringen de waarde uit de ongestoorde beweging mag worden gebruikt, en  $\Delta \delta_1$ ,  $\Delta \varepsilon_1$ ,  $\Delta \delta_2$  en  $\Delta \varepsilon_2$  respectievelijk de verbeteringen van  $\delta$  en  $\varepsilon$  bij  $T_1$  en  $T_2$  zijn.

In dezelfde grootheden zullen wij  $\Delta X_1$  en  $\Delta X_2$  uitdrukken.

Volgens de grondformule (A) van 't 1<sup>e</sup> Stuk is in deze beide gevallen

$$\Delta X = \frac{\sin \varepsilon}{\cos 2 X} \cos 2(D + \delta) \Delta(D + \delta) + \frac{\sin 2(D + \delta)}{2 \cos 2 X} \cos \varepsilon \Delta \varepsilon,$$

omdat  $\Delta \cos 2 \chi$  bij  $T_1$  en bij  $T_2$  nul is; dus met (140)

$$\Delta X = \left( \frac{Tg \psi'}{\sin \varepsilon} \cotg 2(D + \delta) + \sin 2(D + \delta) \cos \varepsilon \right) \frac{\Delta \varepsilon}{2 \cos 2 X}.$$

Maar bij  $T_1$  is

$$\text{Cos } 2(D + \delta) = \text{Cos } 2\delta, \quad \text{Sin } 2(D + \delta) = -\text{Sin } 2\delta,$$

en  $X = -X_0$ ; dus

$$\Delta X_1 = - \left( \frac{Tg \psi'}{\text{Sin } \varepsilon} \text{Cotg } 2\delta + \text{Sin } 2\delta \text{Cos } \varepsilon \right) \frac{\Delta \varepsilon_1}{2 \text{Cos } 2 X_0} \dots (143)$$

Daarentegen

$$\Delta X_2 = \left( \frac{Tg \psi'}{\text{Sin } \varepsilon} \text{Cotg } 2\delta + \text{Sin } 2\delta \text{Cos } \varepsilon \right) \frac{\Delta \varepsilon_2}{2 \text{Cos } 2 X_0} \dots (144)$$

Eindelijk moeten wij nog  $\Delta \chi_1$  en  $\Delta \chi_2$  uitdrukken.

Nu is (volgens (139), (140) en n<sup>o</sup>. 30 van 't 1<sup>e</sup> Stuk)

$$\chi_n = \frac{1}{2}(\varepsilon - \psi'), \quad \chi_s = \frac{1}{2}(\varepsilon + \psi'),$$

bij zwevingen om de  $x_i$ -as; en

$$\chi_n = 90^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon + \psi'), \quad \chi_s = 90^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon - \psi'),$$

bij zwevingen om de  $y_i$ -as. Hieruit volgt, bij zwevingen (klasse B. II) om de  $x_i$ -as

$$\left. \begin{aligned} \Delta \chi_1 &= \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{\frac{1}{2}}, & \Delta \chi_2 &= \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{\frac{3}{2}}, \\ \Delta \chi_1 &= -\frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{\frac{1}{2}}, & \Delta \chi_2 &= -\frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \right\} \dots (145)$$

om de  $y_i$ -as

waar  $\Delta \varepsilon_{\frac{1}{2}}$  en  $\Delta \varepsilon_{\frac{3}{2}}$  de verbeteringen van  $\varepsilon$  in 't midden van de eerste en in 't midden van de tweede onderperiode aanduiden. Wanneer  $\varepsilon_t$  en  $\varepsilon_0$  de waarden van  $\varepsilon$  volgens de onbepaalde integralen (131) en (132) zijn, is  $\Delta \varepsilon = \varepsilon_t - \varepsilon_0 = [\varepsilon]_0'$ ,

en evenzoo  $\Delta \delta = \delta_t - \delta_0 = [\delta]_0'$ .

[2] Wij zullen hierin nu de verschillende waarden der  $\Delta$  variatiën invoeren. In de eerste plaats die deelen  $\Delta_{D1}$ , welke bij  $\psi_D = 0$   $A_D - B_D$  als factor bevatten en die dus afkomstig zijn van een verschil in de wrijving om beide messen, wanneer de symmetrieassen met de projectiën daarvan samenvallen. Gebruik makende van de onbepaalde integralen (131) en (132) en de grenzen er bijvoegende, is

$$\Delta_{D1} \varepsilon = [a_D t + b_D \text{Sin } 2(D + \delta)]_0', \quad \Delta_{D1} \delta = [c_D \text{Cos } 2(D + \delta)]_0';$$

of (133)

$$\Delta_{D1} \varepsilon = \left[ \frac{A_D - B_D}{2} \text{Cos } 2\psi_D (\text{Cos } \psi' \text{Sin } \varepsilon_t + \frac{1}{2\Omega'} \text{Sin}^2 \psi' \text{Cos } \varepsilon \text{Sin } 2(D + \delta)) \right]_0',$$

$$\Delta_{D1} \delta = \left[ \frac{A_D - B_D}{8\Omega'} \text{Cos } 2\psi_D \frac{\text{Sin}^2 \psi'}{\text{Sin } \varepsilon} \text{Cos } 2(D + \delta) \right]_0'.$$

Dus met de waarden van  $\text{Sin } 2(D + \delta)$  en  $\text{Cos } 2(D + \delta)$  op de tijdstippen  $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2,$

$$\Delta_{DI} \varepsilon_{\frac{1}{2}} = \frac{A_D - B_D}{2} \cos 2\psi_D \left( \cos \psi' \sin \varepsilon \frac{T_1}{2} - \frac{1}{2\Omega'} \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \sin 2\delta \right) \quad (146)$$

$$\Delta_{DI} \varepsilon_1 = \frac{A_D - B_D}{2} \cos 2\psi_D \left( \cos \psi' \sin \varepsilon T_1 - \frac{1}{\Omega'} \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \sin 2\delta \right) \quad (147)$$

$$\Delta_{DI} \delta_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (148)$$

$$\Delta_{DI} \varepsilon_{\frac{3}{2}} = \frac{A_D - B_D}{2} \cos 2\psi_D \left( \cos \psi' \sin \varepsilon \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2} \right) - \frac{1}{2\Omega'} \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \sin 2\delta \right) \dots (149)$$

$$\Delta_{DI} \varepsilon_2 = \frac{A_D - B_D}{2} \cos 2\psi_D \cos \psi' \sin \varepsilon \frac{\pi \sin \psi'}{\sqrt{\Omega'^2}} \dots \dots \dots (150)$$

$$\Delta_{DI} \delta_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (151)$$

Hiermede (170 en 132 van 't 1<sup>e</sup> Stuk)

$$\begin{aligned} \Delta X_2 &= \left( \frac{Tg \psi'}{\sin \varepsilon} \cotg 2\delta + \sin 2\delta \cos \varepsilon \right) \frac{A_D - B_D}{4 \cos 2 X_0} \cos \psi' \sin \varepsilon \frac{\pi \sin \psi'}{\sqrt{\Omega'^2}} \cos 2\psi_D = \\ &= (\sin^2 \psi' \cotg 2 X_0 + \cos^2 \psi \cos 2 X_0 \sin 2 X_0) \frac{A_D - B_D}{4 \cos 2 X_0} \frac{\pi \sin \psi'}{\sqrt{\Omega'^2}} \cos 2\psi_D, \\ \Delta X_2 &= (\sin^2 \psi' + \cos^2 \psi \sin^2 2 X_0) \frac{A_D - B_D}{4 \sin 2 X_0} \frac{\pi \sin \psi'}{\sqrt{\Omega'^2}} \cos 2\psi_D; \dots (152) \end{aligned}$$

waaruit volgt dat het vlak der rechte lijnige slingeren aan 't slot van de geheele periode zich in den zin van  $2 X_0$  (positief of negatief maar afgezien van het teeken steeds kleiner dan  $180^\circ$  genomen) of in tegengestelden zin verplaatst heeft, al naarmate  $A_D - B_D$  positief of negatief is, d. w. z. de slingeren sneller afnemen in de richting van de  $x_i$ -as of van de  $y_i$ -as. Bij zwevingen om de as, in wier richting het decrement het kleinste is, hebben wij als 't ware eene inkrimping van het gebied, dat de groote as der slingeringsellips doorloopt, bij zwevingen om de as, in wier richting het decrement het grootste is, als 't ware eene uitbreiding van dit gebied; en deze afwijkingen zijn des te grooter naarmate het oorspronkelijk gebied grooter was.

Nu moeten wij overgaan tot

$$\begin{aligned} \Delta X_1 = & -(S n \psi' + \text{Cos}^2 \psi \text{Sin}^2 2 X_0) \frac{(A_0 - B_0) \text{Cos} 2 \psi_D}{4 \text{Sin} \epsilon \text{Cos} \psi' \text{Sin} 2 X_0} \left( \text{Cos} \psi' \text{Sin} \epsilon T_1 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Omega'} \text{Sin}^2 \psi' \text{Cos} \epsilon \text{Sin} 2 \delta \right) = \\ = & -(\text{Sin}^2 \psi + \text{Cos}^2 \psi \text{Sin}^2 2 X_0) \frac{A_0 - B_0}{4 S n 2 X_0} \text{Cos} 2 \psi_D \left( T_1 - \frac{1}{\Omega'} \frac{\text{Sin}^2 \psi \text{Cos} 2 X_0}{\text{Sin} 2 X_0} \text{Sin}^2 2 \delta \right). \end{aligned}$$

Daar wij een slinger aan het oppervlak van de draaiende aarde beschouwen is  $\frac{1}{\Omega'}$  negatief; het teeken van den tweeden term tusschen ( ) is dus afhankelijk van het teeken van  $\text{Cotg} 2 X_0$ . Wanneer de abnormale periode voorafgaat, is het laatste zoowel voor zwevingen om de  $x_i$ -as als om de  $y_i$ -as positief; zoodat de tweede term de werking van den eersten steeds versterkt. Wanneer daarentegen de normale onderperiode voorafgaat moet men twee gevallen onderscheiden; omdat dan de tweede term negatief is en dus den eersten tegenwerkt.

Daar in dit geval volgens

$$\begin{aligned} T_1 : T_2 &= 2 \delta_1 : \pi, \\ T_1 &= \frac{2 \delta_1 \text{Sin} \psi'}{\sqrt{\Omega'^2}} \end{aligned}$$

is, wanneer men  $2 \delta_1$  de waarde noemt, die in het eerste kwadrant met  $2 \delta$  overeenkomt, wordt

$$\begin{aligned} \Delta X_1 = & -(S n^2 \psi' + \text{Cos}^2 \psi' \text{Sin}^2 2 X_0) \frac{A_0 - B_0}{4 \text{Sin} 2 X_0} \text{Cos} 2 \psi_D (2 \delta_1 - \\ & - \text{Sin} \psi' \sqrt{\text{Cotg}^2 2 X_0 S n^2 2 \delta}) \frac{S n \psi'}{\sqrt{\Omega'^2}} \dots (153) \end{aligned}$$

Zoolang men dus bij voorafgaande normale onderperiode  $X_0$  zoo kiest, dat

$$\text{Cotg}^2 2 X_0 \text{Sin}^2 \psi' < 1,$$

verkrijgen wij, daar  $X_1$  met  $X_2$  symmetrisch ten opzichte van de coördinatenas ligt, eene uitbreiding of inkrimping van het gebied, dat de groote as der slingeringskrommen in de eerste onderperiode doorloopt, al naarmate uit  $\Delta X_2$  eene uitbreiding of inkrimping volgt; nl. uitbreiding bij zwevingen om de as, in wier richting de slingeringen het sterkst, en inkrimping bij zweving om de as in wier richting de slingeringen het minst afnemen. Deze afwijkingen nemen toe wanneer het ongestoorde gebied grooter wordt gekozen.

Wij gaan nu over tot

$$\begin{aligned} & \Delta_{D1} \chi_1 = \pm \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{\frac{1}{2}} = \\ & = \pm \frac{A_D - B_D}{4} \cos 2\psi_D \left( \cos \psi' \sin \varepsilon \frac{T_1}{2} - \frac{1}{2\Omega'} \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \sin 2\delta \right) \quad (154) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta_{D1} \chi_2 = \pm \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{\frac{1}{2}} = \\ & = \pm \frac{A_D - B_D}{4} \cos 2\psi_D \left( \cos \psi' \sin \varepsilon \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2} \right) - \frac{1}{2\Omega'} \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \sin 2\delta \right) \quad (155) \end{aligned}$$

In  $\pm$  heeft  $+$  betrekking op zwevingen om de  $x_i$ -as,  $-$  op zwevingen om de  $y_i$ -as. Het teeken van de grootheid binnen  $()$  wordt bij  $\Delta \chi_1$  weer als bij  $\Delta X_1$  bij de zelfde grensbepaling voor  $X_0$  bepaald door den eersten term; het geldt dan tevens voor  $()$  bij  $\Delta \chi_2$ . Wij hebben dus bij zwevingen om de as van het grootste decrement in beide gevallen uitbreiding en wel bij  $\chi_2$  de grootste, bij zwevingen om de as van het kleinste decrement in krimpung. Uit  $\chi_1$  en  $\chi_2$  kan men, zooals in het 1<sup>e</sup> Stuk werd aangegeven,  $\psi'$  berekenen met

$$\chi_a - \chi_n = \psi' = [\pm](\chi_2 - \chi_1),$$

waar  $[+]$  op het geval dat de normale en  $[-]$  op het geval dat de abnormale onderperiode voorafgaat betrekking heeft; en dus zal men op deze wijze in plaats van  $\psi'$  vinden  $\psi' + \Delta_{D1} \psi'$  met

$$\Delta_{D1} \psi' = [\pm] \pm \frac{A_D - B_D}{4} \cos 2\psi_D \cos \psi' \sin \varepsilon \frac{T_2}{2}, \dots (156)$$

waar  $+$  op zwevingen om de  $x_i$ -as,  $-$  op zwevingen om de  $y_i$ -as betrekking heeft; zoodat  $\psi'$  te groot bij zwevingen om de as van 't grootste, te klein bij zwevingen om de as van 't kleinste decrement gevonden wordt, wanneer de normale onderperiode voorafgaat en omgekeerd wanneer de eerste onderperiode eene abnormale is

Eindelijk bepalen wij nog bij  $\psi_D = 0$ ,  $\Delta_{D1} T_1$  en  $\Delta_{D1} T_2$ . Wegens  $\Delta \delta_1 = 0$  en  $\Delta \delta_2 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{D1} T_1 = \frac{\sin \psi'}{\Omega'} \left( \frac{Tg \psi'}{2 \sin 2X_0 \sin \varepsilon} \right) \frac{A_D - B_D}{2} \cos 2\psi_D \left( \cos \psi' \sin \varepsilon T_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Omega'} \sin^2 \psi' \cos \varepsilon \sin 2\delta \right); \quad (157) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{D1} T_2 = - \frac{\sin \psi'}{\Omega'} \frac{Tg \psi'}{2 \sin 2X_0 \sin \varepsilon} \frac{A_D - B_D}{2} \cos 2\psi_D \cos \psi' \sin \varepsilon T_2 = \\ = - \frac{\sin^3 \psi'}{4\Omega' \sin 2X_0} (A_D - B_D) \cos 2\psi_D \frac{\pi}{\sqrt{\Omega'^2}}. \quad (158) \end{aligned}$$

$\text{Sin } 2 X_0$  is in ons geval negatief wanneer de  $x_i$ , positief wanneer de  $y_i$ -as de symmetrieas der zwevingen is, indien de normale onderperiode en omgekeerd indien de abnormale voorafgaat,  $\Omega'$  is negatief, dus zijn  $\Delta_{DI} T_1$  (in 't geval dat de normale onderperiode voorafgaat weder onderstellende, dat tevens  $\text{cotg}^2 2 X_0 \text{Sin}^2 \psi' < 1$ ) en  $\Delta_{DI} T_2$  van tegengesteld teeken; en wel wordt  $T_2$  vergroot door zwevingen met voorafgaande normale onderperiode om de as, in wier richting de slingeren het kleinste, verkort door zwevingen met voorafgaande normale onderperiode om de as, waarin de slingeren het grootste decrement vertoonen; het omgekeerde is het geval wanneer de abnormale onderperiode voorafgaat. Men zal  $2\delta$  uit de verhouding der perioden berekenende, eene te kleine waarde vinden bij zwevingen om de as van 't kleinste, eene te groote bij zwevingen om de as van het grootste decrement.

[3] Wij gaan nu over tot het geval, dat  $\psi_D$  niet gelijk nul is. In de eerste plaats moet men dan, om de  $\Delta_{DI}$  afwijkingen te vinden, hunne waarden voor  $\psi_D = 0$  alle met  $\text{Cos } 2\psi_D$  vermenigvuldigen (zie 133), waarbij hun zin onveranderd blijft; buitendien moet men nog letten op

$$\Delta_{DII} \varepsilon = [c_D \text{Cos}^2 (D + \delta)]_0' = \left[ \frac{A_D - B_D}{4 \Omega'} \text{Sin } 2\psi_D \text{Cos} \varepsilon \text{Sin} \psi' \text{Cos} 2(D + \delta) \right]_0',$$

$$\Delta_{DII} \delta = [b_D' \text{Sin} 2(D + \delta)]_0' = \left[ \frac{B_D - A_D}{8 \Omega'} \frac{\text{Sin} 2\psi_D}{\text{Sin} \varepsilon} \text{Sin} \psi' \text{Sin} 2(D + \delta) \right]_0'.$$

Tot  $\Delta X_1$ ,  $\Delta X_2$  en  $\Delta T_2$  dragen beide niet bij. Maar zij geven in  $T_1$  en  $\chi_1$  en  $\chi_2$  wijzigingen  $\Delta_{DII} T_1$ ,  $\Delta_{DII} \chi_1$  en  $\Delta_{DII} \chi_2$ ,

$$\Delta_{DII} T_1 = -2 \frac{\text{Sin}^2 \psi'}{\Omega'} \frac{B_D - A_D}{\Omega'} \frac{\text{Sin}^2 \psi_D}{\text{Sin} \varepsilon} \text{Sin} 2\delta =$$

$$= - \frac{\text{Sin}^2 \psi' (B_D - A_D)}{4 \Omega'^2 \text{Sin}^2 \varepsilon} \text{Sin} 2 X_0 \text{Sin}^2 \psi_D \dots (159)$$

$$\Delta_{DII} \chi_1 = \frac{1}{2} \frac{A_D - B_D}{4 \Omega'} \text{Sin} 2\psi_D \sqrt{\text{Cos}^2 \varepsilon} \text{Sin} \psi' (\pm 1 - \text{Cos } 2\delta),$$

$$\Delta_{DII} \chi_2 = \frac{1}{2} \frac{A_D - B_D}{4 \Omega'} \text{Sin} 2\psi_D \sqrt{\text{Cos}^2 \varepsilon} \text{Sin} \psi' (\mp 1 - \text{Cos } 2\delta),$$

waar  $\pm$  voor zwevingen met voorafgaande normale onderperiode om de  $x_i$  of met voorafgaande abnormale onderperiode om de  $y_i$ -as, — voor zwevingen met voorafgaande normale onderperiode om de  $y_i$ -as of met voorafgaande abnormale onderperiode om de  $x_i$ -as geldt. De bepaling van  $\psi'$  uit  $\chi_1$  en  $\chi_2$  levert dus

$$\Delta_{DII} \psi' = - \frac{A_D - B_D}{4\Omega'} \text{Sin } 2\psi_D \text{ Cos } \varepsilon \text{ Sin } \psi'; \dots \dots (160)$$

$\Delta_{DII} \psi'$  is van hetzelfde of tegengestelde teeken als  $\Delta_{DI} \psi'$ , wanneer  $\text{Sin } 2\psi_D$  positief of negatief is.

$\Delta_{DII} T_1$  is van 't zelfde of tegengestelde teeken als  $\Delta_{DI} T_1$  alnaar-mate  $\text{Sin } 2\psi_D$  positief of negatief is.

[4] De verbeteringen, die het gevolg daarvan zijn, dat  $A'_D$  en  $B'_D$  niet nul, en dus de hoogere machten der snelheden op de wrijving van invloed zijn, kunnen, zooals wij in § 7 van Hoofdst. I opmerkten, slechts door mechanische quadraturen gevonden worden. Maar een ruw inzicht in den invloed van  $A'_D$  en  $B'_D$  zal men reeds kunnen verkrijgen, wanneer men in de berekening der vorige verbeteringen voor elke halve onderperiode aan  $A_D - B_D$  de gemiddelde waarde van

$$A'_D \frac{8a}{3\pi} - B'_D \frac{8b}{3\pi},$$

gedurende deze halve onderperiode toevoegt. Zijn  $A'_D$  en  $B'_D$  nage-noeg gelijk en  $\psi_D$  klein, zoo hangt het teeken van deze middelwaarde af van  $a - b$ , of wel van  $\sqrt{1 - \alpha'} - \sqrt{\alpha'}$ , of eindelijk daarvan af, of de zwevingen om de  $x_i$ -as of om de  $y_i$ -as plaats hebben. Bij zwe-ving om de as van 't grootste decrement krijgt men dus vergrooting, bij zweving om de as van 't kleinste decrement vermindering van de af-wijkingen, die uit  $A_D - B_D$  werden afgeleid, waardoor indien dit zeer klein is, zelfs in 't laatste geval eene tegengestelde afwijking kan ontstaan.

[5] De invloed der eindige amplituden was bij mijne proeven zeer ge- ring. Daar wij in het 1<sup>e</sup> Stuk de bewegingsvergelijkingen van onzen slinger algemeen integreerden voor het geval, dat tot een wiskundig opmerkelijken vorm aanleiding gaf, zullen wij ons in de discussie van de in 't vorige Hoofdstuk opgestelde formules, met behulp van welke men ook in het meer algemeene geval de waarnemingen be- vrijden kan van den invloed der eindige amplituden, beperken tot de volgende opmerkingen over de beide meest belangrijke verande- ringen.

Men stelde (bij mijne proeven waren  $A_D - B_D$ ,  $\psi'$ ,  $\psi_D$  en  $\mu_2$  zeer klein)

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu_2 = 0.$$

Dan wordt (zie 139)

$$A_i = S_3, \quad B_i = K_4, \quad C_i = K_2, \quad I_i = S_2, \quad G_i = K_0; (161)$$

en de belangrijkste term in de verbetering voor eindige amplituden

$$\Delta \delta = \Sigma''_0 G_i = 2\mu_1 p \frac{\cos \psi}{\cos \psi'} \cos \varepsilon \left( \frac{1}{2} \cos^2 \psi' - \sin^2 \psi \right) \frac{1 - e^{-F_0 t}}{F_0}. \quad (162)$$

Hieruit volgen voor  $\Delta T_1$  en  $\Delta T_2$  veranderingen van denzelfden zin, wier teeken bepaald wordt door  $\frac{\cos \psi}{\cos \psi'} \frac{\cos \varepsilon}{\Omega'}$ , of w. h. i. door  $(p - q) \cos 2X_0$ .

Dus vinden wij bij zwevingen om de as, in wier richting de slingtijd het kleinst is, verlenging, in het tegengestelde geval verkorting van  $T_1$  en  $T_2$ . Deze as is, omdat  $\Omega'$  negatief is, daaraan te herkennen, dat zij in de normale onderperiode door ellipsen met negatief teeken overschreden wordt.

Verder komt  $\Sigma'_3 A_i$  voornamelijk in aanmerking voor de ellipsen  $\chi_1$  en  $\chi_2$ . Wij hebben

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\frac{1}{2}}(A_i) &= p_i \sin 4\delta - q_i \cos 4\delta + q_i e^{-F_0 T_{\frac{1}{2}}}, \\ \Delta_{\frac{3}{2}}(A_i) &= p_i \sin 4\delta - q_i \cos 4\delta + q_i e^{-F_0 T_{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

waar

$$p_i = \frac{F_0}{F_0^2 + \left( \frac{4\Omega'}{\sin \psi'} \right)^2}, \quad q_i = \frac{\frac{4\Omega'}{\sin \psi'}}{F_0^2 + \left( \frac{4\Omega'}{\sin \psi'} \right)^2} \quad (164)$$

is. Dus zal bij waarden van  $F_0$  en  $\delta$ , die voor ons doel in aanmerking komen, gewoonlijk  $q_i$  veel grooter dan  $p_i$  zijn; tevens is  $\sin^2 4\delta < \cos^2 4\delta$  omdat in de klasse B. II, wanneer niet  $X_0$  dicht bij 0 of  $\pm 90^\circ$  is,  $\delta$  steeds in de nabijheid van  $\pm 90^\circ$  ligt. In die gevallen is derhalve nagenoeg

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\frac{1}{2}}(\Sigma'_3 A_i) &= \Sigma'_3 q_i (e^{-F_0 T_{\frac{1}{2}}} - \cos 4\delta), \\ \Delta_{\frac{3}{2}}(\Sigma'_3 A_i) &= \Sigma'_3 q_i (e^{-F_0 T_{\frac{3}{2}}} - \cos 4\delta), \end{aligned} \right\}$$

waar bij benadering

$$\Sigma'_3 q_i = \frac{\mu_1 p}{2\Omega'} \cos \psi' \sin \psi' \sin \varepsilon \cos \psi$$

gesteld mag worden. Dus, + voor zwevingen om de  $x_1$ -as, - voor zwevingen om de  $y_1$ -as nemende,

$$\pm \Delta \chi_1 = \frac{\mu_1 p}{4\Omega'} \cos \psi' \sin \psi' \sin \varepsilon \cos \psi (e^{-F_0 T_{\frac{1}{2}}} - \cos 4\delta),$$

$$\pm \Delta \chi_2 = \frac{\mu_1 p}{4\Omega'} \cos \psi' \sin \psi' \sin \varepsilon \cos \psi (e^{-F_0 T_{\frac{3}{2}}} - \cos 4\delta).$$

En daar in deze gevallen  $\cos 4\delta$  negatief is, heeft men

$$(\Delta \chi_1)^2 > (\Delta \chi_2)^2,$$

terwijl het teeken van de beide afwijkingen voor zwevingen om de

$x_i$ -as dat van  $\frac{\cos \psi}{\Omega'}$ , dus van  $p-q$ , en voor zwevingen om de  $y_i$ -as het tegengestelde is; zoodat de kleine as der maximumellipsen bij zwevingen om de as in wier richting de slingertijd het kleinst is, vergroot, bij zwevingen om de as in wier richting de slingertijd het grootst is, verkleind wordt.

[6] Wij kunnen nu overgaan tot de derde storing, die het gevolg van den drager is en den factor  $U'_{\varphi\theta}$  bevat. Volgens (132)

$$\Delta_U \varepsilon = b_U (\sin 2(D + \delta) - \sin 2\delta),$$

$$\Delta_U \delta = c'_U (\cos 2(D + \delta) - \cos 2\delta);$$

$$\text{of} \quad \begin{aligned} \Delta_U \varepsilon_{\frac{1}{2}} &= -b_U \sin 2\delta, & \Delta_U \varepsilon_i &= -2b_U \sin 2\delta, \\ \Delta_U \varepsilon_{\frac{3}{2}} &= -b_U \sin 2\delta, & \Delta_U \delta_i &= 0. \end{aligned}$$

Dus (zie 145 en 133)

$$\left. \begin{aligned} \Delta_U \varkappa_2 &= \Delta_U T_2 = 0; \\ \Delta_U \varkappa_1 &= \Delta_U \varkappa_2 = \mp \frac{p}{M} \frac{U'_{\varphi\theta}}{2\Omega'} \cos \psi \operatorname{Tg} \psi' \sin 2\delta, \end{aligned} \right\} \dots (165)$$

waar  $-$  voor zwevingen om de  $x_i$ -as,  $+$  voor zwevingen om de  $y_i$ -as geldt;

$$\left. \begin{aligned} \Delta_U X_1 &= (\sin^2 \psi' + \cos^2 \psi' \sin^2 2X_0) \frac{p}{M} \frac{U'_{\varphi\theta}}{2\Omega'} \frac{\operatorname{Tg} \psi}{\sin^2 \varepsilon}, \\ \Delta_U T_1 &= \frac{\sin \psi'}{\Omega'} \frac{\operatorname{Tg}^2 \psi'}{2\sin^2 \varepsilon} \frac{p}{M} \frac{U'_{\varphi\theta}}{\Omega'} \cos \psi. \end{aligned} \right\} (166)$$

Deze afwijkingen grijpen bij zwevingen om de  $x_i$ - en de  $y_i$ -as in denzelfden zin plaats. Hebben  $U'_{\varphi\theta}$  en  $p-q$  hetzelfde teeken, zoo breidt zich zoowel bij zwevingen om de  $x_i$ - als om de  $y_i$ -as gedurende de eerste onderperiode het gebied, dat de groote as doorloopt, uit in den zin van de  $x_i$ - naar de  $y_i$ -as, en krimpt het gedurende de tweede periode weder tot de oorspronkelijke waarde in. Hebben  $U'_{\varphi\theta}$  en  $p-q$  het tegengestelde teeken zoo heeft gedurende de eerste onderperiode de inkrimping, gedurende de tweede onderperiode de overeenkomstige uitbreiding plaats. De storing der ellipsen in het midden der eerste en der tweede onderperiode is dezelfde. Kortom de geheele wijziging komt hierop neer, dat de ligging der symmetrieassen in plaats van door de waarde van  $\psi_D$  berekend volgens Hoofdstuk I,  $\psi''_D$ , bepaald wordt door

$$\psi_D = \psi''_D - \frac{1}{2} \frac{p}{M} \frac{U'_{\varphi\theta}}{p-q}.$$

§ 2. *Verandering van de klasse der verschijnselen.*

Eene andere belangrijke wijziging in de verschijnselen ten gevolge van de variatie der elementen is de verandering van de klasse, tot welke zij behooren.

Daar verschijnselen behorende bij gelijke maar in teeken tegengestelde waarden van  $\text{Cos } \varepsilon$  volgens n<sup>o</sup>. 24 van 't 1<sup>e</sup> Stuk dezelfde slingeringsellipsen in dezelfde volgorde opleveren en slechts in zoverre verschillen, dat de ligging ten opzichte van de  $x_i$ -as in 't eene geval geheel dezelfde is als in 't andere geval ten opzichte van de  $y_i$ -as, en dat verder de beweging van het waargenomen punt in de baan in beide gevallen in tegengestelden zin plaats grijpt, kunnen wij volstaan met  $\varepsilon$  aanvankelijk tusschen  $0^\circ$  en  $90^\circ$  aan te nemen. Stelt men nog

$$\begin{aligned} \text{Cos}^2 \varepsilon'' &= \text{Cos}^2 \varepsilon, & 0 < \varepsilon'' < 90^\circ, \\ 90^\circ - \psi' &= \psi'', \end{aligned}$$

zoo worden de verschillende klassen (zie § 3 en § 4 van Hoofdstuk II van 't 1<sup>e</sup> Stuk) gekenmerkt door

$$\begin{aligned} \text{E. } \varepsilon'' &= 0, \\ \text{C. II. } \psi'' &> \varepsilon'' < \psi', \\ \text{A. } \psi'' &= \varepsilon'' < \psi', & \text{F. II. } \psi'' > \varepsilon'' = \psi', \\ \text{C. I. } \psi'' &< \varepsilon'' < \psi', & \text{B. II. } \psi'' > \varepsilon'' > \psi', \\ \text{F. I. } \psi'' &< \varepsilon'' = \psi', & \text{D. } \psi'' = \varepsilon'' > \psi', \\ \text{B. I. } \psi'' &< \varepsilon'' > \psi'. \end{aligned}$$

Wanneer  $\varepsilon$  toeneemt zal tot  $90^\circ$  ook  $\varepsilon''$  toenemen; van hieraf neemt, bij voortdurende aangroeiing van  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon''$  weder af. De verschijnselen kunnen dan achtereenvolgens bij onze slingerproef, waar  $\psi'' > \psi'$ , de klassen E, C. II., F. II., B. II., D, B. I. doorloopen; wanneer  $\varepsilon$  blijft toenemen, omgekeerd van B. I weder in D, B. II., F. II., C. II., E, overgaan, enz. Dezelfde kring zal in omgekeerde volgorde doorloopen worden, wanneer  $\varepsilon$  voortdurend afneemt. De tweede helft er van heeft ten opzichte van de  $y_i$ -as dezelfde beteekenis als de eerste ten opzichte van de  $x_i$ -as. Zoo komt C. II. in de eerste helft overeen met zwevingen van ellipsen om de  $x_i$ -as, in de tweede helft met zwevingen van ellipsen om de  $y_i$ -as; B. I in de eerste helft met ellipsen wier groote as steeds in denzelfden zin verder beweegt en gedurende de kleinste onderperiode in de nabijheid van de  $x_i$ -as is, in de tweede helft met zulke waar zij in de kleinste on-

derperiode in de nabijheid van de  $y_i$ -as is. Wanneer nu, zooals ten gevolge van de gezamentlijke in de vorige § besproken storingen,  $\varepsilon$  niet gelijkmatig verandert, zal de klasse nu eens in den eenen dan weder in den anderen zin veranderen, en laat zich bij het aanschakelen van op verschillende wijze uit verschillende klassen genomen groepen van slingeringsvormen eene groote verscheidenheid van verschijnselen voorzien.

Bij de discussie zullen wij ons weder beperken tot het meest opmerkelijke geval in onze proeven, nl. tot den invloed van een verschil in wrijving om beide messen, waarbij wij verder  $\psi_D = 0$  stellen. De verandering van  $\varepsilon$  in eene geheele periode wordt dan in de klasse C. II, waar  $\sin \varepsilon$  klein is, (zie 125), zeer gering, en is gedurende de periode zelve afwisselend positief en negatief; in de klasse B. I. en B. II. is zij voortdurend van hetzelfde teeken en wordt dit bepaald door  $A_D - B_D$ . Wanneer wij dus uitgaan van C. II. om de as, in wier richting het decrement het grootste is, komen wij door F. II. in B. II, vervolgens door D in B. I. met de groote as der ellipsen gedurende de kleinste onderperiode in de nabijheid van dezelfde as, vervolgens (terwijl  $\varepsilon$  door  $90^\circ$  gaat) in B. I met de kleinste onderperiode in de nabijheid van de as in wier richting het decrement het kleinst is, dan in B. II om dezelfde as en eindelijk in C. II. Alle klassen voeren dus, wanneer  $\psi' < \psi''$  gemaakt is, zooals bij de slingerproeven volgens mijne methode het geval was, ten slotte tot de klasse C. II om de as, in wier richting het decrement het kleinst is. De berekening van de verdere verandering van  $\varepsilon$  in deze klasse zou door de groote gelijktijdige verandering van  $\delta$ , die  $\sin \varepsilon$  in den noemer heeft, tot samengestelde ontwikkelingen aanleiding geven. Wij mogen echter aannemen, dat er eindelijk een grensvorm optreedt, en zulk eene onveranderlijke ellips onder de werking van de wrijving en de draaiing der aarde wordt in het volgende Hoofdstuk bij de behandeling van de proeven van BRAVAIS, voor welke zij meer bijzonder van belang is, bepaald.

Bij slingerproeven, waar  $\psi'' < \psi'$  gemaakt is, zal men uit C. II, om de as in wier richting het decrement het grootst is, door A in C. I., uit C. I door F. I in B. I om dezelfde as, vervolgens terwijl  $\varepsilon$  door  $90^\circ$  gaat, in B. I om de andere as, en eindelijk in C. I. en C. II. om deze zelfde as komen; en voor de eindwaarde zal weer dezelfde redeneering als in 't geval  $\psi'' > \psi'$  gelden, nl. eene onveranderlijke ellips in de nabijheid van de as, in wier richting het decrement het kleinste is, gevonden worden.

Twee gevallen moeten wij voor onze proeven bijzonder in 't oog houden. Neemt men  $X_0$  zoo, dat de slingeren oorspronkelijk in een der symmetrieassen en wel in die van 't kleinste decrement vallen, zoo behooren de verschijnselen bij  $Tg\psi < 1$  tot de klasse F. II; zij gaan echter terstond over in C. I. en men zal de slingeren niet weder rechtlijnig zien worden. Dit is ook nog het geval wanneer men de oorspronkelijke slingeren slechts weinig van deze symmetrieas laat afwijken. Neemt men  $X_0$  zoo, dat zonder de wrijving verschijnselen van de klasse B. II. om de as van 't grootste decrement zouden komen, maar dicht bij de grenswaarde  $X_0^D$  (zie 't 1<sup>e</sup> Stuk) van het azimuth  $X_r$ , dan kan ten gevolge van de wrijving de klasse der verschijnselen overgaan in B. I.

§ 3. *Eliminatie van de afwijkingen ten gevolge van de wrijving evenredig aan de snelheden en van de eindige amplituden.*

Wij zullen nu nader het geval beschouwen, dat  $\psi$ ,  $\psi_D$ ,  $A_D - B_D$ ,  $A'_D - B'_D$ ,  $\mu$ , en  $\mu_2$  zulke waarden hebben en  $X_0$  zoo gekozen is, dat met inachtneming van het in de vorige § behandelde, zoowel bij aanvankelijke slingeren in het azimuth  $X_0$  als in het azimuth  $X_0 - 90_0$  zwevingen van de klasse B. II. respectievelijk om de  $x_i$ - en de  $y_i$ -as voorspeld kunnen worden. Blijft men als bij de benaderde integratie van  $\delta$  en  $\varepsilon$  onderstellen, dat bij de berekening van hunne afwijkingen,  $\delta$  en  $\varepsilon$  voor zoover zij in de uitdrukking daarvan voorkomen als standvastig beschouwd mogen worden, zoo kan men de meeste verbeteringen op de volgende wijze elimineeren. Men neme de verschijnselen waar welke aanvankelijk in het azimuth  $X_0$  vallende rechtlijnige slingeren opleveren; vervolgens die, welke uit vlakke slingeren van dezelfde slingerwijdte maar aanvankelijk in het azimuth  $X_0 + 90^\circ$  vallende ontstaan; uit het gemiddelde van deze beide waarnemingen vallen de afwijkingen ten gevolge van de wrijving rechtevenredig aan de snelheid en van de eindige amplituden weg. Immers wanneer men  $X_0 + 90^\circ$  in plaats van  $X_0$  neemt komt  $-\text{Cos}\varepsilon$  in plaats van  $\text{Cos}\varepsilon$  en  $2\delta + 180^\circ$  in plaats van  $2\delta$ ;  $a_D$ ,  $b'_D$ ,  $c'_D$ ,  $\Sigma'_3$ ,  $\Sigma'_4$ ,  $\Sigma''_1$  en  $\Sigma''_2$  blijven daarbij onveranderd;  $b_D$ ,  $\varepsilon_D$ ,  $\Sigma'_1$ ,  $\Sigma'_2$ ,  $\Sigma''_0$ ,  $\Sigma''_3$  en  $\Sigma''_4$  nemen het tegengestelde teeken aan; tegelijkertijd verandert het teeken van  $\text{Sin}2(D + \delta)$ ,  $\text{Cos}2(D + \delta)$ ,  $C_i$  en  $I_i$ ; terwijl  $A_i$ ,  $B_i$  en  $G_i$  hetzelfde teeken behouden (zie 134). Wanneer het verschil van  $F$  in beide gevallen gering is, kan men dus stellen, dat  $\Delta''\varepsilon$  in het tweede geval ( $X_0 + 90^\circ$  als aanvankelijk

azimuth) hetzelfde is als in het eerste geval ( $X_0$  als aanvankelijk azimuth) en dat  $\Delta'' \delta$  in het tweede geval tegengesteld is aan  $\Delta' \delta$  in 't eerste geval, voor zoover  $\Delta$  afkomstig is van de wrijving recht-evenredig aan de snelheden en van de eindige amplituden.

Met (143) en (144) volgt daaruit

$$\Delta'' X_1 = -\Delta' X_1, \quad \Delta'' X_2 = -\Delta' X_2,$$

met (141) en (142)

$$\Delta'' T_1 = -\Delta' T_1, \quad \Delta'' T_2 = -\Delta' T_2,$$

en met (145)

$$\Delta'' \alpha_1 = -\Delta' \alpha_1, \quad \Delta'' \alpha_2 = -\Delta' \alpha_2.$$

Neemt men dus het gemiddelde uit de waarnemingen

$$X'_0, \alpha'_1, X'_1, T'_1, \alpha'_2, T'_2,$$

in 't eerste eenerzijds en van

$$X''_0, \alpha''_1, X''_1, T''_1, \alpha''_2, T''_2,$$

in 't tweede geval anderzijds, en trekt men van  $\frac{X'_0 + X''_0}{2}$  en van  $\frac{X'_1 + X''_1}{2}$   $45^\circ$  af, zoo verkrijgt men de waarden van  $\alpha_1$ ,  $X_1$ ,  $T_1$ ,  $\alpha_2$  en  $T_2$ , die bij het aanvankelijk azimuth  $\frac{X'_0 + X''_0}{2}$  van rechtlijnige slingeringen behooren en nog slechts ten gevolge van den invloed van den drager en van den invloed van de hoogere machten der snelheden op de wrijving van de theoretische uit het 1<sup>e</sup> Stuk afwijken. Dit blijft het geval wanneer  $X'_0$  en  $X''_0$  niet juist  $90^\circ$  maar een weinig meer of minder verschillen.

§ 4. *De afwijkingen ten gevolge van den invloed van de hoogere machten van de snelheden op de wrijving.*

Wanneer wij de afwijkingen der waarnemingen  $\alpha'_1$ ,  $X'_1$  enz. van  $\alpha_1$ ,  $X_1$ , enz. en  $\alpha''_1$ ,  $X''_1$  enz. van  $\alpha_1$ ,  $X_1 + 90^\circ$ , enz. blijven aangeven door  $\Delta'$  en  $\Delta''$ , zoo is in 't algemeen voor zoover de  $\Delta$  afkomstig zijn van de wrijving recht evenredig aan de snelheden

$$\frac{d\Delta'}{dt} = (A_0 - B_0) \frac{d\Delta'_0}{dt},$$

$$\frac{d\Delta''}{dt} = (A_D - B_D) \frac{d\Delta''_0}{dt} = - (A_D - B_D) \frac{d\Delta'_0}{dt},$$

waar de  $\Delta_0$  de waarden van  $\Delta$  zijn voor  $A_D - B_D = 1$ .

Letten wij nu verder alleen op de tweede machten der snelheden in de wrijving, zoo komt voor  $A_D - B_D$  respectievelijk

$$\frac{8}{3\pi} (A_{D'} a' - B_{D'} b') \text{ en } \frac{8}{3\pi} (A_{D'} a'' - B_{D'} b''),$$

in de plaats, wanneer wij de waarden van  $a$  en  $b$  in de twee proeven weer door ' en '' onderscheiden. Maar in de ongestoorde beweging is steeds

$$a' = b'', \quad b' = a''.$$

Dus wordt

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta'}{dt} &= \frac{8}{3\pi} (A_{D'} a' - B_{D'} b') \frac{d\Delta'_0}{dt}, \\ \frac{d\Delta''}{dt} &= - \frac{8}{3\pi} (B_{D'} a' - A_{D'} b') \frac{d\Delta''_0}{dt}; \end{aligned}$$

en

$$\frac{1}{2} \frac{d(\Delta' + \Delta'')}{dt} = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{A_{D'} + B_{D'}}{2} (a' - b') \frac{d\Delta'_0}{dt}; \dots (167)$$

zoodat om de afwijkingen tengevolge van de tweede machten der snelheden, die in de gemiddelden van de vorige § overblijven, te berekenen, alleen het gemiddelde van  $A'_D$  en  $B'_D$  en niet deze beide waarden afzonderlijk bekend behoeven te zijn.

Wij zullen die berekening voor een geval uitvoeren, dat in mijne proefreeks [H] (zie het proefondervindelijk gedeelte) waargenomen werd en daarbij overeenkomstig met deze opmerking vooreerst de grootheden zoeken, die met den coëfficiënt  $\frac{4}{3\pi} (A_D + B_D)$  vermenigvuldigd de werkelijke waarde der gezochte storingen geven.

Om de waarde van

$$\Delta_{D'} \varepsilon = \int_0^t \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{D'} dt \text{ en } \Delta_D \delta = \int_0^t \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{D'} dt,$$

door mechanische quadraturen te vinden, moeten wij, nadat voor  $A_D - B_D$  in  $\left( \frac{d}{dt} \right)_D$ ,  $a' - b'$  geschreven is, de functie onder het integraalteeken berekenen voor een aantal door gelijke tusschenruimten gescheiden waarden van  $t$ . Wij verdeelen daartoe de geheele periode

der ongestoorde beweging in 20 deelen,  $\omega$ , en duiden de waarden der functiën,  $f$ , onder het integraalteeken voor  $t = \frac{1}{2} \omega$ ,  $t = \frac{3}{2} \omega$ ,  $t = \frac{5}{2} \omega$  enz., door

$$f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right) \text{ enz.}$$

aan.

Volgens (93<sup>c</sup>) en (94), moeten wij dus vooreerst voor die waarden van  $t$  berekenen

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{h \left\{ (1 - 2\alpha') \text{Cos } 2\psi_D - 2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \text{Cos } T_0 \text{Sin } 2\psi_D + 1 \right\}} = \\ &= \sqrt{h_0} e^{-\frac{F_0 t}{2}} \sqrt{1 + \text{Cos } 2\chi \text{Cos } 2(X + \psi_D)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{h \left\{ -(1 - 2\alpha') \text{Cos } 2\psi_D + 2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \text{Cos } T_0 \text{Sin } 2\psi_D + 1 \right\}} = \\ &= \sqrt{h_0} e^{-\frac{F_0 t}{2}} \sqrt{1 - \text{Cos } 2\chi \text{Cos } 2(X + \psi_D)}; \end{aligned}$$

wanneer wij in eerste benadering

$$h = h_0 e^{-F_0 t}$$

stellen (vergelijk (122) en (136)).

Wij ontleenen daartoe de proefondervindelijke gegevens aan de proeven [H. X & XI], op de in § 3 aangegeven wijze met [H. XII] tot eene gemiddelde waarneming samengesteld.

Deze geven

$$\begin{aligned} \psi_D &= -13^\circ 44', \\ 2X_0 &= -32^\circ 37', \\ \psi' &= 9^\circ 20' 30'', \end{aligned}$$

terwijl de theoretische waarde van  $\Omega'$  voor de breedte van Groningen en per seconde geteld bepaald wordt door

$$\log \omega_{x_0} = \bar{5}.7658,$$

met — boven den wijzer van den logarithmus aanduidende, dat het bijbehorend getal negatief is, en met elk accent achter den wijzer, dat er eens 10 afgetrokken moet worden. Verder was  $\psi' = \psi$ , want de  $x_i$ -as, het dichtst bij de projectie van het vaste mes gelegen, was de as der zwevingen en werd normaal door positieve ellipsen overschreden. Volgens (132) van 't 1<sup>e</sup> Stuk is dus

$$\varepsilon = 33^\circ 47'.$$

Verder volgens (170) van 't 1<sup>e</sup> Stuk, wanneer men ter bepaling van 't quadrant nog de tweede van (123) van 't eerste Stuk te hulp neemt

$$2\delta = -75^\circ 46'.$$

Eindelijk werd bij  $T_2$ , dus bij  $t = 20 \omega$  gevonden

$$\log e^{-F_0 \frac{T_2}{2}} = 9'.7786.$$

Met deze waarden wordt nu bij

| $t$                   | $\log \frac{1}{\sqrt{h_0}} (a' - b')$ | $t$                   | $\log \frac{1}{\sqrt{h_0}} (a' - b')$ |
|-----------------------|---------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| 0                     | 9'.7131                               | $\frac{21}{2} \omega$ | 9.9364                                |
| $\frac{1}{2} \omega$  | 9'.7459                               | $\frac{23}{2} \omega$ | 9'.8743                               |
| $\frac{3}{2} \omega$  | 9'.7745                               | $\frac{25}{2} \omega$ | 9'.8061                               |
| $\frac{5}{2} \omega$  | 9'.8248                               | $\frac{27}{2} \omega$ | 9'.7339                               |
| $\frac{7}{2} \omega$  | 9'.8761                               | $\frac{29}{2} \omega$ | 9'.6599                               |
| $\frac{9}{2} \omega$  | 9'.9246                               | $\frac{31}{2} \omega$ | 9'.5902                               |
| $\frac{11}{2} \omega$ | 9'.9754                               | $\frac{33}{2} \omega$ | 9'.5298                               |
| $\frac{13}{2} \omega$ | 0.0044                                | $\frac{35}{2} \omega$ | 9'.4879                               |
| $\frac{15}{2} \omega$ | 0.0231                                | $\frac{37}{2} \omega$ | 9'.4687                               |
| $\frac{17}{2} \omega$ | 0.0350                                | $\frac{39}{2} \omega$ | 9'.4786                               |
| $\frac{19}{2} \omega$ | 9'.9932                               | 20 $\omega$           | 9'.4917                               |

Verder vindt men dan door in de formules (117), (118), (119) en (120) deze waarden van  $a' - b'$  in plaats van  $A_D - B_D$  te stellen de grootheden

$$\frac{3\pi}{4(A_{D'} + B_{D'})} \frac{1}{\sqrt{h_0}} \frac{d \Delta_{D'} \varepsilon}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{3\pi}{4(A_{D'} + B_{D'})} \frac{1}{\sqrt{h_0}} \frac{d \Delta_{D'} \delta}{dt}.$$

Behalve de waarden van deze functiën bij  $t = (i + \frac{1}{2})\omega$ , waar  $i$  een geheel getal is, moet men verder <sup>1)</sup> vormen de verschillen

$$\begin{aligned} f'(i) &= f(i + \frac{1}{2}) - f(i - \frac{1}{2}), \\ f''(i + \frac{1}{2}) &= f'(i + 1) - f'(i), \\ f'''(i) &= f''(i + \frac{1}{2}) - f''(i - \frac{1}{2}), \text{ enz.}, \end{aligned}$$

en eindelijk de overeenkomstige somreeks aangeduid door  $'f$ , in dier voege dat

$$'f(i) - 'f(i-1) = f(i - \frac{1}{2})$$

en dat

$$'f(0) = -\frac{1}{24} f'(0) + \frac{15}{5760} f'''(0) - \frac{367}{967680} f^{(5)}(0) + \text{enz.}$$

<sup>1)</sup> ENCKE, *Berl. Jahrbuch* 1837.

De formule

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(\frac{1}{2}\omega + n\omega) dn = f(i+1) + \frac{1}{24} f'(i+1) - \frac{15}{5760} f''(i+1) + \\ + \frac{367}{967680} f^{IV}(i+1) + \text{enz.} \dots (168)$$

levert dan de waarden van de gezochte integraal op de tijden  $(i+1)\omega$ .

Wanneer men verder onder  $f'(i+\frac{1}{2})$  in 't algemeen het gemiddelde van  $f'(i)$  en  $f'(i+1)$  verstaat, dus

$$f'(i+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} f'(i+1) + \frac{1}{2} f'(i),$$

en evenzoo  $f''(i+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} f''(i+1) + \frac{1}{2} f''(i)$  enz.,

als ook  $f'(i+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} f'i + \frac{1}{2} f'(i+1)$

stelt — zoo geeft de formule

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\frac{1}{2}}^i f(\frac{1}{2}\omega + n\omega) dn = f(1+\frac{1}{2}) - \frac{1}{12} f'(i+\frac{1}{2}) + \frac{11}{720} f''(i+\frac{1}{2}) - \\ - \frac{191}{60480} f^{IV}(i+\frac{1}{2}) + \text{enz.} \dots (169)$$

de waarde van de gezochte integraal op de tijden  $(i+\frac{1}{2})\omega$

Uit de zoo gevonden waarden van de integraal op 40 tijdstippen kan men dan, zoo noodig, de waarde op elk tusschen gelegen tijdstip door interpolatie bepalen.

Als voorbeeld geven wij,

$$\Delta'_{D'} = \frac{3\pi}{4(A_{D'} + B_{D'})} \Delta_{D'}$$

stellende, het volgende tafeltje voor de

*Mechanische quadratuur van  $\frac{d\varepsilon}{dt}$*

| $t$                  | $f = \frac{2}{\sqrt{h_0}} \frac{dA'_{D/\varepsilon}}{dt}$ | $f'$    | $f'''$  | $f^V$   | $f'$   | $\frac{2}{\omega \sqrt{h_0}} A'_{D/\varepsilon}$ |
|----------------------|-----------------------------------------------------------|---------|---------|---------|--------|--------------------------------------------------|
| 0                    |                                                           | -0.0036 | -0.0110 | +0.0112 | 0.0001 | 0                                                |
| $\frac{1}{4}\omega$  | 0.4263                                                    | -0.0079 | -0.0083 | +0.0033 | 0.2132 | 0.2137                                           |
| $\frac{1}{2}\omega$  |                                                           | -0.0122 | -0.0057 | -0.0045 | 0.4264 | 0.4259                                           |
| $\frac{3}{4}\omega$  | 0.4141                                                    | -0.0193 | -0.0053 | +0.0006 | 0.6334 | 0.6349                                           |
| $\omega$             |                                                           | -0.0265 | -0.0049 | +0.0058 | 0.8405 | 0.8394                                           |
| $\frac{5}{4}\omega$  | 0.3876                                                    | -0.0361 | -0.0016 | -0.0006 | 1.0343 | 1.0373                                           |
| $\frac{3}{2}\omega$  |                                                           | -0.0457 | +0.0017 | -0.0071 | 1.2281 | 1.2262                                           |
| $\frac{7}{4}\omega$  | 0.3419                                                    | -0.0544 | +0.0014 | +0.0241 | 1.3990 | 1.4036                                           |
| $2\omega$            |                                                           | -0.0632 | +0.0012 | +0.0412 | 1.5700 | 1.5674                                           |
| $\frac{9}{4}\omega$  | 0.2787                                                    | -0.0713 | +0.0215 | -0.0274 | 1.7093 | 1.7156                                           |
| $\frac{5}{2}\omega$  |                                                           | -0.0795 | +0.0419 | -0.0961 | 1.8487 | 1.8553                                           |
| $\frac{11}{4}\omega$ | 0.1992                                                    | -0.0667 | +0.0142 | -0.0035 | 1.9483 | 1.9541                                           |
| $3\omega$            |                                                           | -0.0539 | -0.0135 | +0.0891 | 2.0479 | 2.0257                                           |
| $\frac{13}{4}\omega$ | 0.1453                                                    | -0.0478 | +0.0033 | +0.0162 | 2.1205 | 2.1244                                           |
| $\frac{7}{2}\omega$  |                                                           | -0.0418 | +0.0202 | -0.0567 | 2.1932 | 2.1915                                           |
| $\frac{15}{4}\omega$ | 0.1035                                                    | -0.0256 | +0.0087 | -0.0186 | 2.2444 | 2.2465                                           |
| $4\omega$            |                                                           | -0.0096 | -0.0028 | +0.0194 | 2.2967 | 2.2963                                           |
| $\frac{17}{4}\omega$ | 0.0940                                                    | +0.0052 | -0.0046 | +0.0068 | 2.3437 | 2.3432                                           |
| $\frac{9}{2}\omega$  |                                                           | +0.0200 | -0.0064 | -0.0057 | 2.3907 | 2.3915                                           |
| $\frac{19}{4}\omega$ | 0.1140                                                    | +0.0315 | -0.0110 | +0.0088 | 2.4477 | 2.4449                                           |
| $5\omega$            |                                                           | +0.0431 | -0.0157 | +0.0233 | 2.5047 | 2.5065                                           |
| $\frac{21}{4}\omega$ | 0.1571                                                    | +0.0468 | -0.0087 | -0.0108 | 2.5532 | 2.5792                                           |
| $\frac{11}{2}\omega$ |                                                           | +0.0505 | -0.0017 | -0.0450 | 2.6618 | 2.6639                                           |
| $\frac{23}{4}\omega$ | 0.2076                                                    | +0.0533 | -0.0172 | +0.0144 | 2.7656 | 2.7609                                           |
| $6\omega$            |                                                           | +0.0562 | -0.0327 | +0.0139 | 2.8694 | 2.8718                                           |
| $\frac{25}{4}\omega$ | 0.2518                                                    | +0.0427 | -0.0112 | +0.0114 | 2.9953 | 2.9915                                           |
| $\frac{13}{2}\omega$ |                                                           | +0.0292 | +0.0102 | -0.0510 | 3.1212 | 3.1224                                           |
| $\frac{27}{4}\omega$ | 0.2810                                                    | +0.0208 | +0.0061 | -0.0190 | 3.2617 | 3.2601                                           |
| $7\omega$            |                                                           | +0.0124 | +0.0021 | +0.0129 | 3.4022 | 3.4027                                           |
| $\frac{29}{4}\omega$ | 0.2934                                                    | +0.0050 | +0.0045 | +0.0040 | 3.5489 | 3.5486                                           |
| $\frac{15}{2}\omega$ |                                                           | -0.0023 | +0.0069 | -0.0049 | 3.6956 | 3.6955                                           |
| $\frac{31}{4}\omega$ | 0.2911                                                    | -0.0062 | +0.0068 | -0.0038 | 3.8411 | 3.8417                                           |
| $8\omega$            |                                                           | -0.0101 | +0.0068 | -0.0027 | 3.9867 | 3.9863                                           |
| $\frac{33}{4}\omega$ | 0.2810                                                    | -0.0106 | +0.0054 | -0.0012 | 4.1268 | 4.1278                                           |
| $\frac{17}{2}\omega$ |                                                           | -0.0111 | +0.0040 | +0.0003 | 4.2677 | 4.2672                                           |
| $\frac{35}{4}\omega$ | 0.2699                                                    | -0.0096 | +0.0027 | -0.0009 | 4.4026 | 4.4034                                           |
| $9\omega$            |                                                           | -0.0081 | +0.0015 | -0.0021 | 4.5376 | 4.5373                                           |
| $\frac{37}{4}\omega$ | 0.2618                                                    | -0.0058 | -0.0008 | -0.0006 | 4.6685 | 4.6690                                           |
| $\frac{19}{2}\omega$ |                                                           | -0.0036 | -0.0031 | +0.0008 | 4.7994 | 4.7995                                           |
| $\frac{39}{4}\omega$ | 0.2582                                                    | -0.0029 | -0.0050 | +0.0040 | 4.9285 | 4.9286                                           |
| $10\omega$           |                                                           | -0.0022 | -0.0069 | +0.0072 | 5.0576 | 5.0575                                           |

Daar uit de opgegeven waarden van  $\psi'$  en  $\delta$

$$T_1 = 8.42 \omega$$

gevonden wordt; moeten wij door interpolatie volgens de bekende formule

$$\left. \begin{aligned} f(a + n \omega') &= f(a) + n \left\{ f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) + \frac{1}{6} f'''(a) - \dots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} n^2 \left\{ f''(a) - \frac{1}{2} f'''(a) + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{6} n^3 \left\{ f'''(a) - \frac{1}{4} f^{(4)}(a) + \dots \right\} \\ &\quad + \text{enz.} \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

waarin wij nu  $\frac{1}{2} \omega$  als interval.,  $\omega'$ , kunnen nemen, de waarden van

$$\frac{2}{\sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \varepsilon \text{ berekenen}$$

bij  $t = 4.21 \omega$   $8.42 \omega$   $14.12 \omega$   
en vinden daarvoor

$$\frac{2}{\omega \sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \varepsilon : + 1.6320 \quad + 2.3359 \quad + 3.4377.$$

Eenzoo vinden wij volgens (168), (169) en (170)

bij  $t = 8.42 \omega$   $\frac{2}{\omega \sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \delta = -1.2731$

en bij  $t = 20 \omega$   $\frac{2}{\omega \sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \delta = -0.6443.$

Eindelijk vindt men de verandering van den Neperiaanschen logarithmus  $Lg h$  door gebruik te maken van (104), volgens welke

$$\frac{d Lg h}{dt} = -\frac{A_D}{2} \frac{a^2}{h} - \frac{B_D}{2} \frac{b^2}{h}$$

en dus  $\frac{d}{dt} (\Delta' Lg h) = -\frac{4 A_{D'}}{3 \pi} \frac{a'^3}{h} - \frac{4 B_{D'}}{3 \pi} \frac{b'^3}{h}; \dots (171)$   
zoodat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta' + \Delta''}{2} Lg h \right) &= -\frac{2 A_{D'}}{3 \pi} \frac{(a'^3 + b'^3)}{h} - \frac{2 B_{D'}}{3 \pi} \frac{(b'^3 + a'^3)}{h} = \\ &= -\frac{2(A_{D'} + B_{D'})}{3 \pi} \frac{(a'^3 + b'^3)}{h}, \end{aligned}$$

en bij invoering van  $\Delta'_{D'}$ , in plaats van de werkelijk in het gemiddelde overblijvende afwijking  $\Delta_D$ ,

$$\frac{d}{dt} (\Delta'_{D'} Lg h) = -\sqrt{h_0} \cdot \frac{a'^3 + b'^3}{2 h \sqrt{h_0}} \dots (172)$$

De uitvoering dezer quadratuur geeft

$$\frac{1}{\omega \sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \lg h_{\frac{1}{2}} = -4.641, \quad \frac{1}{\omega \sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \lg h_1 = -9.502,$$

$$\frac{1}{\omega \sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \lg h_{\frac{2}{3}} = -15.103, \quad \frac{1}{\omega \sqrt{h_0}} \Delta'_{D'} \lg h_2 = -19.301.$$

Om tot de waarde van den gemeenschappelijken coëfficiënt  $\frac{2}{3\pi} (\mathcal{A}_{D'} + \mathcal{B}_{D'}) \omega \sqrt{h_0}$ , met welke de verkregen grootheden vermenigvuldigd moeten worden om  $\Delta_{D'} \varepsilon$  en  $\Delta_{D'} \delta$  te leveren, te geraken, ontleenen wij aan de waarneming, dat ten slotte

$\Delta_{D'} X_2 = -1^\circ 2'$  of in boogmaat  $\log \Delta_{D'} X_2 = \bar{8}' . 2561$  is in de onderstelling, dat deze geheel aan de wrijving afhankelijk van de tweede macht der snelheid moet worden toegeschreven.

Volgens (144) en met

$$\log \frac{\frac{Tg \psi'}{\sin \varepsilon} \cotg 2\delta + \sin 2\delta \cos \varepsilon}{2 \cos 2X_0} = \bar{9}' . 7184$$

vindt men voor den logarithmus van dien coëfficiënt  $7' . 8338$ .

Hiermede komt dan

$$\log \Delta' \varepsilon_{\frac{1}{2}} = 8' . 0465, \quad \log \Delta' \varepsilon_1 = 8' . 2023, \quad \log \Delta' \varepsilon_{\frac{2}{3}} = 8' . 3701;$$

$$\log \Delta' \delta_1 = \bar{7}' . 9387, \quad \log \Delta' \delta_2 = \bar{7}' . 6429;$$

en dus volgens (141), (142), (143) en (145)

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_{D'} \lg h_{\frac{1}{2}} &= -0.0633, & \Delta'_{D'} \lg h_1 &= -0.1296, \\ \Delta'_{D'} \lg h_{\frac{2}{3}} &= -0.2060, & \Delta'_{D'} \lg h_2 &= -0.2633, \end{aligned} \right\} [L]$$

en

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{D'} \chi_1 &= +19' . 1, & \Delta'_{D'} X_1 &= +28,6', & \Delta'_{D'} T_1 &= +36'' . 3, \\ \Delta_{D'} \chi_2 &= +40' . 3, & \Delta'_{D'} X_2 &= -1^\circ 2', & \Delta'_{D'} T_2 &= -14'' . 1. \end{aligned} \right\} \cdot [m]$$

Herhaalt men dezelfde proef met andere amplitude zoo worden alle verbeteringen evenredig daarmede gewijzigd; volgt uit de proef eene andere waarde van  $\Delta' X$ , zoo blijkt dat men den zoeven gevonden coëfficiënt in dezelfde verhouding wijzigen moet en dus ook de overeenkomstige  $\Delta'$  van  $\chi$ ,  $\chi$ ,  $X$ ,  $T$ , en  $T$  in dezelfde verhouding veranderen. In het proefondervindelijk gedeelte worden verschillende herhalingen van dezelfde proef in de [H] en [K] reeks tot eene middelwaarde samengevat. Dit gemiddelde der waarnemingen komt overeen met  $\Delta'_{D'} X_2 = -1^\circ 0' 30''$ ; men kan dus voor de overige correctiën zonder merkbare fout de waarden [m] nemen. Bij eene tweede gemid-

delde van zulke proeven bij kleinere beginamplitude (de eindamplitude van de vorige) bleef in de gemiddelde waarneming over  $\Delta' X_2 = -32'$ .

In de onderstelling dat deze afwijking geheel van de wrijving afhankelijk van de tweede macht der snelheden afkomstig was, zou men hebben moeten vinden  $\Delta' X_2 = -36'$ , wat met de waargenomen  $\Delta' X_2$  zeer goed overeenstemt.

Men kan zich de vraag stellen, welke waarden voor de verbeteringen bij de zoo even beschouwde proef gevonden zouden zijn, aannemende, dat geen andere storingen dan eene wrijving rechtevenredig aan de snelheid gewerkt had en wel met zulk eene waarde van  $A_D - B_D$ , dat voor  $\Delta X_2$  dezelfde waarde  $-1^{\circ}2'$  gevonden zou zijn. Ik vind voor deze volgens de formules van § 1

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_1 &= 18', 1, & \Delta X_1 &= 21, 6, & \Delta T_1 &= 34'', 3, \\ \Delta \alpha &= 30', 7, & \Delta X_2 &= -1^{\circ}2', & \Delta T_2 &= -26'', 4. \end{aligned}$$

De afwijkingen tusschen deze waarden en de onder  $[m]$  opgegevene zijn zoo gering, dat zij nauwelijks waargenomen kunnen worden en bij mijne proeven door de toevallige storingen verre overtroffen worden. Wanneer men dus twee bij elkaar behoorende proeven, die niet door ze verscheidene malen te herhalen van de toevallige fouten bevrijd zijn, volgens § 3 samenstelt en men tengevolge van de wrijving afhankelijk van de tweede macht der snelheden eene kleine eindafwijking  $\Delta' X_2 = X_2 - X_0$  overhoudt, mag men de verbetering der waarneming, die haar doet wegvallen, eenvoudigheidshalve berekenen alsof zij het gevolg was van een verschil van de wrijving rechtevenredig aan de snelheid om de beide messen. Wanneer men verder alleen zwevingen om ééne der coördinatenassen waargenomen en daarbij de afwijking  $X_2 - X_0$  gevonden heeft, maar niet weet welk deel er van aan de eerste, en welk deel aan de hoogere machten der wrijving moet worden toegeschreven, mag men ter berekening van de correctiën beide deelen eenvoudig als afkomstig van eene wrijving rechtevenredig aan de snelheid opvatten. Deze beide gevolgtrekkingen gelden natuurlijk alleen voor mijne of met overeenkomstige waarden van  $\psi'$ ,  $\psi_D$ ,  $h$ ,  $A_D - B_D$ , en  $X_0$  verrichte proeven.

Beschouwen wij nu verder weder het zoo even behandelde gemiddelde van eenige proeven uit de [H] en [K] reeks. In de eerste onderperiode was aanvankelijk  $\beta$ , de *Brigg. log.* van  $h$  afgezien van eene standvastige, 5.4897; na  $T_1 = 1^h.0302$  was  $\beta_1 = 5.2900$  en na  $T_2 = 2^h.4382$  was  $\beta_2 = 5.0397$  geworden. Berekent men hieruit de gemiddelde afname van den *Neper lg.* in  $\omega = \frac{1}{2} T_2$  zoo vindt men daarvoor gedurende

de eerste onderperiode 0.0544, gedurende de tweede 0.0499.

Berekent men verder volgens de opgegeven waarden van  $\Delta'_{D'} lgh$  hoeveel de wrijving afhankelijk van de tweede macht van de snelheid bijdraagt tot deze waarden, zoo vindt men

in de eerste 0.0150, in de tweede 0.0113.

Het verschil van deze beide grootheden moet het verschil tusschen de werkelijk waargenomene verklaren, en inderdaad is de overeenstemming, wanneer men de mate van nauwkeurigheid der waarnemingen in aanmerking neemt vrij bevredigend, daar zij minstens aantoon, dat beide grootheden van dezelfde orde zijn. In de eerste onderperiode van de tweede proef vindt men voor de bijdrage van de wrijving afhankelijk van de tweede macht 0.0089, inderdaad is ook nu weder de waargenomen afname, 0.0483, kleiner; gedurende de volgende onderperiode echter is de grootte van deze afname weer toegenomen tot 0.0521, hoewel de bijdrage van de wrijving afhankelijk van de tweede macht der snelheid tot 0.0067 daalde. Uit [p] en [q] op pag. 205 blijkt, dat deze toename van het decrement op rekening van de wrijving onafhankelijk van de snelheid gesteld, overeen zou komen met eene belangrijke inkrimping van het gebied in de tweede proef, die niet waargenomen werd. Voor een klein deel slechts kan zij aan de toetreding van lucht in den toestel gedurende de proef worden geweten en moet wel voornamelijk door de geringe nauwkeurigheid van de bepaling der kleine amplituden verklaard worden. Daarentegen wijst de afwijking van  $X_1$  in de tweede periode van  $X_1$  in de eerste periode, nl. 14'.5, in plaats van 49'.2 (theorie) op eene werking van de wrijving onafhankelijk van de snelheid (als in 't algemeen bij de beweging van twee vaste lichamen om elkaar heen) waarop men bij nauwkeuriger proeven zal moeten letten.

§ 5. *De afwijkingen ten gevolge van den invloed der wrijving onafhankelijk van de snelheid.*

(Vervolg van Hoofdstuk I, § 5.)

Ter berekening van dien invloed moet men in de reeks (93) den vorm der coëfficiënten als daar kiezende aan de tweede afgeleiden van  $v$  en  $\mu$  toevoegen

$$-\frac{A_D}{\sqrt{A_0}} \frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}} \text{ en } -\frac{B_D}{\sqrt{B_0}} \frac{\frac{d\mu}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2}}.$$

Daaruit volgt dan in de ontwikkeling (98) van  $\Xi$  en H een term

$$- 'A_D \frac{\text{Cos } p t'''}{\sqrt{\text{Cos}^2 p t'''}} \text{ en } - 'B_D \frac{\text{Cos}(p t''' + \theta)}{\sqrt{\text{Cos}^2(p t''' + \theta)}}.$$

Dezelfde redeneering, waarmede na de ontwikkelingen (199) tot (101) aangetoond werd, dat slechts de middelwaarden

$$\overline{\Xi \text{Cos}(p t' - f)} \text{ en } \overline{H \text{Cos}(p t' - g)},$$

voor de verandering der elementen in aanmerking komen, leert dat dit ook hier het geval is en dat de nieuwe termen in  $\Xi$  en H bij deze middelwaarden de termen

$$- 'A_D \sqrt{\overline{\text{Cos}^2(p t' - f)}} \text{ en } - 'B_D \sqrt{\overline{\text{Cos}^2(p t' - g)}}$$

voegen, voor welke men weder als op pag. 166 vindt

$$-\frac{2}{\pi} 'A_D \text{ en } -\frac{2}{\pi} 'B_D.$$

Om dus deze wrijving in rekening te brengen behoeft men aan de reeksen, die volgens pg. 167 in de plaats van  $A_D$  en  $B_D$  gesteld moeten worden om hoogere machten der snelheden in rekening te brengen, slechts toe te voegen

$$\frac{4}{\pi a} 'A_D \text{ en } \frac{4}{\pi b} 'B_D \dots \dots \dots (173)$$

En het blijkt dus dat de formules, die wij op pg. 167 verkregen voor de wrijving afhankelijk van de  $(n+1)^{\text{de}}$  macht de snelheden ook geldig zijn voor het geval van  $n = -1$ .

Wanneer men weer volgens § 3 van dit Hoofdstuk twee waarnemingen samenvoegt, en de afwijkingen ten gevolge van de wrijving onafhankelijk van de snelheid in beide door ' $\Delta$ ' en ' $\Delta$ ' aanduidt, komt even als in (167) voor de afwijking van het gemiddelde

$$\frac{1}{2} \frac{d(' \Delta + ' \Delta'')}{dt} = \frac{2('A_D + 'B_D)}{\pi} \left( \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} \right) \frac{d\Delta_0'}{dt} \dots (174)$$

Ook deze afwijkingen kan men slechts door mechanische quadraturen berekenen. Eene vereenvoudiging wordt hierin echter gebracht door de volgende opmerking. Stellen wij overeenkomstig met de schrijfwijze van § 4 ' $\Delta_D \varepsilon$  en ' $\Delta_D \delta$  voor de storing ten gevolge van de wrijving onafhankelijk van de snelheid en verder

$$' \Delta'_D = \frac{\pi}{2('A_D + 'B_D)} ' \Delta_D;$$

zoo is bij  $\varepsilon$  en  $\delta$  
$$\frac{d\Delta'_D}{dt} = \frac{1}{a'b'} \frac{d\Delta'_D}{dt},$$

en kan men dus de waarden der functien  $f$ , op welke de mechanische quadratuur moet worden toegepast bij de gekozen intervallen gemakkelijk uit grootheden bepalen, die reeds in de berekening der storingen door de wrijving afhankelijk van de hoogere machten der snelheden werden gebruikt. De verandering van  $\log h$  door de wrijving onafhankelijk van de snelheid vindt men weder door gebruik te maken van (104), welke geeft

$$\left(\frac{d \lg h}{dt}\right)_{D'} = -\frac{2}{\pi} \frac{A_D}{h} a - \frac{2}{\pi} \frac{B_D}{h} b,$$

of wanneer men weer het gemiddelde uit twee volgens § 3 samengevoegde waarnemingen neemt en de afwijking hierin als voren met  $\Delta_D$  aanduidt

$$\frac{d}{dt} (\Delta_D \lg h) = -\frac{A_D + B_D}{\pi \sqrt{h_0}} \cdot \frac{(a' + b')}{\sqrt{h}} \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{h}} \dots \quad (175)$$

en 
$$\frac{d}{dt} (\Delta'_D \lg h) = -\frac{1}{2 \sqrt{h_0}} \frac{a' + b'}{\sqrt{h}} \frac{\sqrt{h_0}}{h},$$

waar nu  $a'$  en  $b'$  weer op zwevingen om de  $x$ -as betrekking hebben.

Bij uitvoering der aangeduide berekeningen werd gevonden:

$$\frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \delta_1 = +2.6696, \quad \frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \delta_2 = -2.4400,$$

$$\frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \varepsilon_{\frac{1}{2}} = -2.4170, \quad \frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \varepsilon_1 = -5.9338,$$

$$\frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \varepsilon_{\frac{3}{2}} = -11.087,$$

$$\frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \varepsilon_2 = -15.605,$$

$$\frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \lg h_{\frac{1}{2}} = -8.319, \quad \frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \lg h_1 = 16.31,$$

$$\frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \lg h_{\frac{3}{2}} = -29.24,$$

$$\frac{2 \sqrt{h_0}}{\omega} \Delta'_D \lg h_2 = -46.76.$$

Met eene eindafwijking  $'\Delta_D X_2 = +1^\circ$  komt dus overeen

$$\left. \begin{aligned} '\Delta_D X_1 &= -8',8, & '\Delta_D X_1 &= -22',7, & '\Delta_D T_1 &= -25'',4, \\ '\Delta_D X_2 &= -40',5, & '\Delta_D X_2 &= 1^\circ, & '\Delta_D T_2 &= +39'',9; \end{aligned} \right\} [p]$$

en

$$\left. \begin{aligned} '\Delta_D \lg h_{\frac{1}{2}} &= -0.0177, & '\Delta_D \lg h_1 &= -0.0347, \\ '\Delta_D \lg h_{\frac{3}{2}} &= -0.0621, & '\Delta_D \lg h_2 &= 0.0994. \end{aligned} \right\} [q]$$

Heeft men voor eene proef door mechanische quadratuur de bij elkaar behoorende waarden van  $'\Delta_D$  eenerzijds en van  $\Delta_D$ , anderzijds gevonden, zooals die afgezien van een coëfficiënt in 't algemeen voor de door ons beschouwde proef in  $[l]$ ,  $[m]$ ,  $[p]$  en  $[q]$  opgegeven worden; zoo kan men de overblijvende afwijking  $\Delta$  in het volgens § 3 gevormd gemiddelde

$$\Delta = P'\Delta_D + Q\Delta_D \dots \dots \dots (176)$$

stellen, waar  $P$  en  $Q$  twee standvastigen zijn, die men uit de gegevens van de proef zelf bepalen kan. Men kan tot het opstellen der twee noodige vergelijkingen bijv. kiezen de eindafwijking  $\Delta X_2$  en het verschil tusschen het gemiddelde decrement in de eerste en in de tweede onderperiode. Of men kan, wanneer men de proef bij verschillende amplituden herhaald heeft het verloop met eene benaderde waarde van  $\psi'$ ,  $\psi_D$  en  $\Omega'$  berekenen en volgens de methode der kleinste kwadraten de veranderingen  $\Delta\psi'$ ,  $\Delta\psi_D$ ,  $\Delta\Omega'$  en de waarden van  $P$  en  $Q$  bepalen, die deze berekende verschijnselen het best met de proeven doen overeenstemmen. Zoo zal men bij nauwkeuriger, maar niet volgens § 3 twee aan twee vereenigde, proeven ook  $A_D$  en  $B_D$ ,  $A'_D$  en  $B'_D$  en  $'A_D$  en  $'B_D$  elk afzonderlijk kunnen bepalen.

---

## HOOFDSTUK III.

### TOEPASSING VAN DE AFGELEIDE FORMULEN OP DE AFWIJINGEN BIJ DE SLINGERPROEVEN VAN FOUCAULT EN BRAVAIS.

---

#### § 1. *Afwijkingen bij de slingerproef van FOUCAULT.*

Bij het doen van de slingerproef van FOUCAULT met een langen slinger heeft men bijna altijd afwijkingen van het theoretisch geval

van den enkelvoudigen slinger waargenomen, die in 't bijzonder door VAN DER WILLIGEN te Haarlem proefondervindelijk onderzocht zijn. Zijne waarnemingen zijn in de *Archives du Musee Teyler*, Tom II, medegedeeld en werden verkregen met een looden bol van 9 KG opgehangen aan een ijzerdraad waarvan de diameter 1 mM en de lengte 10,5 M was. Wij zullen hier de wijze van ophangen beschrijven omdat de meesten, die zich met deze proeven hebben bezig gehouden, daarin terecht de voornaamste oorzaak der storingen zoeken.

Door een balk van een gewelf in Teylers Museum was een verticaal gat geboord van 5 dM. lengte, waardoor onder sterke wrijving een stuk ijzeren buis van 6,5 dM. lengte 13,5 mM. diameter en 1.8 mM. wanddikte gestoken werd. Het bovineinde was van een kraag voorzien en hiermede op de balk vastgeschroefd. Aan het beneden-einde was een koperen stuk met eene kegelvormige, naar beneden cilindrisch uitlopende doorboring aangeschroefd, waarin de ijzerdraad met wrijving paste. Het benedengedeelte er van was overlans gespleten; zoodat men de ijzerdraad er gemakkelijk in kon brengen. Wanneer dit geschied was, werd er eene moer overgeschroefd en daardoor de ijzerdraad er onbewegelijk in bevestigd.

De tabel op pg. 207 bevat twee afzonderlijke door  $d$  en  $i$  onderscheiden proeven; daar echter de slinger bij 't begin van de tweede nagenoeg in hetzelfde azimuth in vlakke slingering werd gebracht, als bij het einde van de eerste proef waargenomen werd, en verder de slingeringen aan 't einde van de eerste proef (zooewel als aan 't begin) nagenoeg vlak waren, kan men de tweede als vervolg van de eerste beschouwen en levert de tabel een overzicht over het verloop van de draaiingssnelheid van het slingervlak en den elliptischen vorm van de slingeringen gedurende eene geheele omdraaiing van het slingervlak, uitgaande van het azimuth der aanvankelijke slingeringen in de eerste proef. De draaiing van het slingervlak in een uur, is onder  $D$  in graden en decimaaldeelen daarvan opgegeven en werd berekend uit de waarneming van het azimuth van de groote as der slingerbanen op twee tijdstippen; het gemiddelde van deze azimuth is onder  $A$ , het gemiddelde van de daarbij behorende chronometer aanwijzingen onder  $T$  opgegeven. In de regels, die met „bij het begin” en „bij het einde” aanvangen, is echter onmiddellijk de aflezing van een azimuth  $A$  bij den tijd  $T$  aangegeven; uit de waarneming bij het begin en bij het einde is het getal berekend, dat onder  $D$  als „bij het einde” wordt opgegeven.  $Q$  levert de afwijkingen van de theo-



retische waarde van  $D$ ,  $11^{\circ},914$ ,  $a$  de groote,  $b$  de kleine as van de slingeren,  $F$  hunne verhouding en  $E$  den zin van de beweging in de ellips, waarbij de zin van de beweging van den uurwijzer positief genomen is. Eindelijk is  $P$  het azimuth ten opzichte van het vlak, dat den hoek tusschen het aanvankelijk en eindazimuth der vlakke slingeren midden doordeelt. Dit vlak heeft het azimuth  $125^{\circ},11$  voor de  $d$ 's en  $30^{\circ},9$  voor de  $i$ 's, beide vlakken staan dus nagenoeg loodrecht op elkaar. Uit de proeven van VAN DER WILLIGEN blijkt nu, dat de vlakken  $30^{\circ},9$  en  $125^{\circ},1$ , of slechts weinig graden daarvan afwijkende, dezelfde rol spelen wanneer men het aanvankelijk azimuth der slingeren anders kiest, maar niets aan den slinger zelf verandert.

Bereikt het slingervlak door de draaiing der aarde het eerst het vlak  $30^{\circ},9$ , zoo worden de slingeren positief elliptisch en neemt hunne kleine as toe, totdat hunne groote as in dit vlak valt; is het er door overschreden, zoo nemen beide grootheden af tot het slingervlak weer nagenoeg denzelfden hoek met dit vaste vlak, nu echter naar de andere zijde gemeten, vormt. De slingeren zijn dan weder rechtlijnig geworden.

Hetzelfde is het geval wanneer eerst  $125^{\circ},1$  bereikt wordt, de slingeren worden dan echter negatief elliptisch. De duur van eene geheele omdraaiing van het slingervlak verschilt in 't algemeen, alnaarmate men een ander beginazimuth kiest, maar het gemiddelde uit vele proeven met verschillend beginazimuth komt nader bij de theoretische waarde.

Ik zal zulke middelwaarden uit de tabellen van VAN DER WILLIGEN, die elk over ongeveer 60 uren zich uitstrekken, in graden en decimaldeelen daarvan aangeven, benevens de middelwaarden  $R$ , van het product van de beide assen der slingeringskrommen en den tijd voor elke reeks in uren en millimeters. Het product is voor negatief-elliptische slingeren als negatief in rekening gebracht.

|     | $D$    | $R$    |
|-----|--------|--------|
| I   | 12.032 | + 78.1 |
| II  | 12.105 | - 43.4 |
| III | 11.974 | - 41.5 |
| IV  | 11.810 | - 37.8 |

gemiddelde 11.980 theorie 11.914.

Dergelijke afwijkingen tusschen de proeven onderling vindt men

terug in de uitgebreide proefreeksen van BUNT <sup>1)</sup>; zij worden zooals BUNT (Ph. M. T. II, p. 118) opmerkt en bij zijn eerste proeven vond, grooter voor grootere amplituden. Voor de correctie van die afwijkingen heeft men gemeend te kunnen volstaan met eene door GALBRAIGHT, HAUGHTON en G. B. AIRY opgestelde formule, die wij in n°. 47 van 't 1<sup>e</sup> Stuk hebben behandeld.

Voor dezen slinger was

$$\frac{135.1800}{4\pi l^2} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,000155,$$

wanneer  $l$  in millimeters uitgedrukt is. Deze grootheid met de waarde van  $R$  in de vorige tabel vermenigvuldigd, is de afwijking van de onder  $D$  medegedeelde gemiddelde draaiing per uur van de theoretische nl. van 11.914, tengevolge van de eindige waarde der amplituden; zij verklaart van de werkelijke afwijkingen slechts een onbeduidend gedeelte.

### § 2. Formule voor de beweging van het slingervlak.

Wij zullen nu echter de vergelijkingen voor de beweging van het slingervlak en de verandering der ellipsen opstellen, wanneer men niet alleen op deze afwijking, maar ook op die ten gevolge van  $p - q$  en van  $A_D - B_D$  bij onzen cardanisch opgehangen slinger let.

Volgens (101) van 't 1<sup>e</sup> Stuk is

$$\begin{aligned} \sin 2\chi \cos 2X \frac{d\chi}{dt} + \sin 2X \cos 2\chi \frac{dX}{dt} &= \frac{d\alpha'}{dt} \\ - \sin 2\chi \sin 2X \frac{d\chi}{dt} + \cos 2X \cos 2\chi \frac{dX}{dt} &= \cos T_0 \frac{1 - 2\alpha'}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \frac{d\alpha'}{dt} - \\ &\quad - \sin T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \frac{dT_0}{dt}, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \cos 2\chi \frac{d\chi}{dt} &= \left\{ \sin 2X + \cos 2X \cos T_0 \frac{(1 - 2\alpha')}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \right\} \frac{d\alpha'}{dt} - \\ &\quad - \cos 2X \sin T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \frac{dT_0}{dt}, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Ph. Mag. 4<sup>th</sup> Ser. T. I. p. 552. T. II. p. 87, 81, 158, 424.

$$\begin{aligned} \text{Cos}^2 2\chi \frac{dX}{dt} = & \left\{ 2\text{Cos}T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} + (1-2\alpha')\text{Cos}T_0 \frac{1-2\alpha'}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \right\} \frac{d\alpha'}{dt} - \\ & -(1-2\alpha')\text{Sin}T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \frac{dT_0}{dt}, \end{aligned}$$

$$\text{Cos}^2 2\chi \frac{dX}{dt} = \frac{\text{Cos}T_0}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \frac{d\alpha'}{dt} - (1-2\alpha')\text{Sin}T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \frac{dT_0}{dt}. \quad (177)$$

Verder

$$\begin{aligned} \text{Sin} 2\chi \frac{d\chi}{dt} = & \left\{ \text{Cos} 2X - \text{Sin} 2X \text{Cos}T_0 \frac{1-2\alpha'}{2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \right\} \frac{d\alpha'}{dt} + \\ & + \text{Sin} 2X \text{Sin}T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \frac{dT_0}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d\text{Cos}^2 2\chi}{dt} = & \left\{ 2(1-2\alpha') - 2\text{Cos}^2 T_0 (1-2\alpha') \right\} \frac{d\alpha'}{dt} + \\ & + 4\text{Cos}T_0 \text{Sin}T_0 \alpha'(1-\alpha') \frac{dT_0}{dt}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\text{Cos}^2 2\chi}{dt} = -4(1-2\alpha')\text{Sin}^2 T_0 \frac{d\alpha'}{dt} - 8\text{Cos}T_0 \text{Sin}T_0 \alpha'(1-\alpha') \frac{dT_0}{dt}. \quad (178)$$

Wanneer men hierin invoert (107) en (108) van 't 1<sup>e</sup> Stuk met  $\Omega'$  in plaats van  $\gamma$ , komt

$$\begin{aligned} \text{Cos}^2 2\chi \frac{dX}{dt} = & -\Omega'(\text{Cos}^2 T_0 + (1-2\alpha')^2 \text{Sin}^2 T_0) - \\ & -(1-2\alpha')\text{Sin}T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')}(q-p) \\ \frac{dX}{dt} = & -\Omega' - \frac{(1-2\alpha')\text{Sin}T_0(q-p)\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}}{\text{Cos}^2 2\chi} = -\Omega' - \\ & -[\pm]^r \text{Cos} 2X T_0 2\chi \frac{q-p}{2}; \dots \dots \dots (179) \end{aligned}$$

en uit

$$\frac{d\text{Cos}^2 2\chi}{dt} = -8\text{Sin}T_0 \text{Cos}T_0 \alpha'(1-\alpha')(q-p),$$

eveneens met (102) van 't 1<sup>e</sup> Stuk

$$\frac{d\chi}{dt} = [\pm]^r \text{Sin} 2X \frac{(q-p)}{2} \dots \dots \dots (180)$$

Neemt men nu de termen in  $\frac{d\alpha}{dt}$  en  $\frac{dT_0}{dt}$  afkomstig van eindige amplituden en van de wrijving recht evenredig aan de snelheden volgens (102) en (105), zoo vindt men

$$\begin{aligned} \left(\frac{dX}{dt}\right)_D &= -\frac{B_D - A_D}{4} \frac{2 \cos 2\psi_D \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} + (1-2\alpha') \sin 2\psi_D}{1-4\alpha'(1-\alpha')^2 \sin T_0} = \\ &= -\frac{B_D - A_D}{4} \frac{\cos 2\psi_D \sin 2X \cos 2\chi + \cos 2\chi \cos 2X \sin 2\psi_D}{\cos^2 2\chi} = \\ &= \frac{A_D - B_D}{4} \frac{\sin 2(X + \psi_D)}{\cos 2\chi}, \quad (181) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \cos^2 2\chi}{dt} &= 2(B_D - A_D) \{ (1-2\alpha') \sin^2 T_0 (2\alpha'(1-\alpha') \cos 2\psi_D + \\ &+ (1-2\alpha') \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin 2\psi_D) - \cos T_0 \sin^2 T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin 2\psi_D \} = \\ &= (B_D - A_D) \sin^2 2\chi (\cos 2X \cos 2\chi \cos 2\psi_D - \sin 2X \cos 2\chi \sin 2\psi_D); \end{aligned}$$

en dus

$$\left(\frac{d\chi}{dt}\right)_D = \frac{A_D - B_D}{4} \sin 2\chi \cos 2(\psi_D + X) \dots \dots (182)$$

Bij het aanbrengen van de verbetering voor eindige amplituden mag men den slinger van FOUCAULT als een enkelvoudigen slinger beschouwen; dan is volgens n°. 47 van het 1<sup>e</sup> Stuk

$$\left(\frac{d\chi}{dt}\right)_A = 0, \quad \left(\frac{dX}{dt}\right)_A = -\mu_1 s = -[\pm] r \frac{3\pi}{8t} \frac{a'b'}{l^2},$$

zoodat ten slotte, afgezien van de hoogere machten der wrijving, de beweging van de groote as van de slingeringsellips wordt bepaald door

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\Omega' - [\pm] r \frac{3\pi}{8t} \frac{a'b'}{l^2} - [\pm] r \cos 2X \operatorname{Tg} 2\chi \frac{q-p}{2} + \\ &+ \frac{A_D - B_D}{4} \frac{\sin 2(X + \psi_D)}{\cos 2\chi} \dots \dots \dots (183) \end{aligned}$$

Hierin moet men bij inachtneming van de andere machten der snelheden in de wrijving voor  $A_D$  en  $B_D$  nog de reeksen in de plaats stellen. In hoofdzaak zal deze vergelijking ook de draaiing van het slingervlak bepalen wanneer men de slingerproef van FOUCAULT op de gewone wijze doet; het verschil tusschen de draaiing van het slingervlak bij den cardanisch opgehangen slinger en bij dien van VAN DER WILLIGEN zal voornamelijk daarin gelegen zijn, dat de andere machten van de snelheid een anderen invloed op de wrijving uitoefenen. De toevallige storingen in zijne proeven, die vooral blijken uit de onregelmatige verandering van vorm en ligging der slingeringsellipsen, en aan trillingen van het gebouw, luchtstromingen enz.

moeten worden toegeschreven, zijn echter veel te belangrijk om deze formule in zijne waarnemingen bevestigd te vinden.

§ 3. *Discussie van de gestoorde slingerproef van FOUCAULT.*

Laten wij nu tot de integraalvergelijkingen voor de bewegingsverschijnselen bij den cardanisch opgehangen slinger, wanneer  $\psi'$  nagenoeg tot  $90^\circ$  of m. a. w.  $\psi''$  zeer klein is gemaakt en de slingeringen aanvankelijk vlak zijn, overgaan. Wanneer de storingen niet in aanmerking kwamen, zouden zich verschijnselen van de klasse B. I. vertoonen en volgens de grondvergelijkingen (A) van 't 1<sup>e</sup> Stuk en pag. 158 tot in de derde machten van  $\psi''$  nauwkeurig

$$\left. \begin{aligned} \cos 2 X \cos 2 \chi &= \psi''^2 \cos 2 X_0 + \\ &+ (1 - \frac{1}{2} \psi''^2) (1 - \frac{1}{2} \psi''^2 \cos^2 2 X_0) \cos 2 (D + \delta), \\ \sin 2 X \cos 2 \chi &= (1 - \frac{1}{2} \psi''^2 \cos^2 2 X_0) \sin 2 (D + \delta), \end{aligned} \right\} (184)$$

en dus

$$1 - \cos^2 2 \chi = \psi''^2 (\cos 2 (D + \delta) - \cos 2 X_0)^2;$$

of  $\chi$  eene grootheid van de orde van  $\psi''$  zijn.

De afwijking van de groote as der slingeringsellips van de ligging, die zij zoude innemen, wanneer zij met de gelijkmatige snelheid

$-\frac{\sin \psi'}{\Omega'}$  om de verticaal draaide, wordt het gemakkelijkst gevonden

door  $\sin 2 (X - D - \delta)$  te vormen, waaruit blijkt, dat

$$\begin{aligned} \sin 2 \left( X + \frac{\Omega'}{\sin \psi'} t - \delta \right) \cos 2 \chi &= \\ &= \psi''^2 \sin 2 (D + \delta) \left( \frac{1}{2} \cos 2 (D + \delta) - \cos 2 X_0 \right) \end{aligned}$$

en dus tot in de derde macht van  $\psi''$  nauwkeurig

$$X = -\frac{\Omega'}{\sin \psi'} t + \delta + \frac{1}{2} \psi''^2 \sin 2 (D + \delta) \left( \frac{1}{2} \cos 2 (D + \delta) - \cos 2 X_0 \right);$$

of, daar  $\delta$  slechts ten bedrage van eene grootheid van de orde van  $\psi''^2$  van  $X_0$  verschilt,

$$\begin{aligned} X = X_0 - \frac{\Omega'}{\sin \psi'} t + \frac{1}{2} \psi''^2 \sin 2 (D + X_0) \left( \frac{1}{2} \cos 2 (D + X_0) - \cos 2 X_0 \right) + \\ + \frac{1}{8} \psi''^2 \sin 4 X_0 \dots \dots \dots (185) \end{aligned}$$

is. De bedoelde afwijking is dus eene grootheid van de orde van  $\psi''^2$  en bij het azimuth gegeven door (185) behoort de ellips, die door

$$\pm \chi = \psi'' (\text{Cos } 2(D + X_0) - \text{Cos } 2 X_0) \dots \dots (186)$$

tot in de tweede macht van  $\psi''$  nauwkeurig bepaald wordt. Om de verdere afwijking onder den invloed der verschillende storingen te leeren kennen behoeft men in de beschouwingen van het vorige Hoofdstuk slechts geringe wijzigingen te brengen.

De formules (141), (142), (143) en (144) blijven hier van toepassing, daar zij gelden voor elke waarde van  $\psi'$ . Voor (145) komt in de plaats

$$\Delta \chi_1 = \pm \frac{1}{2} \Delta \varepsilon \frac{1}{2}, \quad - \Delta \chi_2 = \pm \frac{1}{2} \Delta \varepsilon \frac{3}{2}, \dots \dots (187)$$

waar  $+$  geldt voor het geval, dat de slingeringsellips het eerst de  $x_i$ - en  $-$  voor het geval, dat zij het eerst de  $y_i$ -as overschrijdt. In deze formules (141) ... (144) en (187) moeten wij nu weder de waarden van  $\Delta \varepsilon$  en  $\Delta \delta$  ten gevolge van de verschillende storingen invoeren. Wij beginnen daartoe met de variatiën van  $\varepsilon$  en  $\delta$  ten gevolge van de wrijving, en verwaarloozen in de berekening der storingen de tweede en hoogere machten van  $\psi''$ , verder beschouwen wij als in § 1 van het vorige Hoofdstuk weder eerst de termen, die  $\text{Cos } 2 \psi_D$  als factor bevatten.

De vergelijkingen (150) en (152) blijven gelden en geven dan

$$\Delta_{D1} X_2 = \frac{A_D - B_D}{4 \text{Sin } 2 X_0} \frac{\pi}{\sqrt{\Omega'^2}} \text{Cos } 2 \psi_D \dots \dots (188)$$

Wanneer  $\text{Sin } 2 X_0$  negatief is bereikt de groote as der slingerings-ellipsen het eerst de  $x_i$ , wanneer  $\text{Sin } 2 X_0$  positief is het eerst de  $y_i$ -as.

Hieruit volgt, dat wanneer  $\text{Sin } 2 X_0$  niet te klein is in 't algemeen de groote as der ellipsen, voor dat de slingeringen ten tweede male rechtlijnig worden een gebied doorloopt, dat kleiner of grooter dan  $180^\circ$  is, alnaarmate in de richting van de symmetrieas, die het eerst overschreden wordt, de slingeringen het sterkst of het minst afnemen.

De afleiding van  $\Delta \varepsilon_1$  in (147) uit de algemeene formule blijft ook hier gelden, daar aan het einde van de eerste onderperiode  $\text{Sin } 2(D + \delta) = - \text{Sin } 2 \delta$  is; daar wij verder  $2 \delta = 2 X_0$  en

$$T_1 : T_2 = -4 \delta : 2 \pi \text{ voor het geval, dat de } x_i\text{-as,}$$

$$T_1 : T_2 = 2 \pi - 4 \delta : 2 \pi \text{ voor het geval, dat de } y_i\text{-as}$$

het eerst overschreden wordt, hebben, leert eene redeneering overeenkomende met die bij (153), dat

$$\Delta X_1 = - \text{Cos } 2 \psi_D \frac{A_D - B_D}{4 \text{Sin } 2 X_0} (-2 X_0 + \frac{1}{2} \text{Sin } 4 X_0) \frac{1}{\sqrt{\Omega'^2}}, (189)$$

voor  $X_0$  negatief, en

$$\Delta X_1 = -\text{Cos } 2\psi_D \frac{A_D - B_D}{4 \text{Sin } 2X_0} (\pi - 2X_0 + \frac{1}{2} \text{Sin } 4X_0) \frac{1}{\sqrt{\Omega'^2}}, \quad (190)$$

voor  $X_0$  positief is. Het teeken van de grootheid tusschen ( ) is dus steeds positief; zoodat  $\Delta X_1$  steeds tegengesteld in teeken aan  $\Delta X_2$  is, en het gebied der eerste onderperiode uitgebreid of verkort wordt, al naarmate de in haar overschreden symmetrieas de richting is, voor welke het grootste of het kleinste decrement geldt.

Verder is

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{D1} \chi_1 &= \pm \frac{A_D - B_D}{4} \text{Cos } 2\psi_D \psi'' \left( \frac{T_1}{2} - \frac{1}{2\Omega'} \text{Cos } 2X_0 \text{Sin } 2X_0 \right), \\ -\Delta_{D1} \chi_2 &= \pm \frac{A_D - B_D}{4} \text{Cos } 2\psi_D \psi'' \left( \frac{T_2 + T_1}{2} - \frac{1}{2\Omega'} \text{Cos } 2X_0 \text{Sin } 2X_0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

waar het bovenste der teekens  $\pm$  geldt, wanneer  $\chi_1$  in de  $x_i$  en  $\chi_2$  in de  $y_i$ -as valt, en het benedenste voor het tegengestelde geval. Wij hebben dan bij overschrijding van de as van 't grootste decrement vergrooing, bij die van 't kleinste verkleining van de kleine as.

Om  $\psi'$  te bepalen zal men nu hebben

$$\chi_1 + \chi_2 = 90^\circ - \psi',$$

en wordt dus

$$\Delta \psi' = \pm \frac{A_D - B_D}{4} \psi'' \frac{T_2}{2} \text{Cos } 2\psi_D \dots \dots \dots (192)$$

zoodat men  $\psi'$  te groot of te klein vindt al naarmate het eerst de symmetrieas waarin het decrement het kleinste of het grootste is overschreden wordt.

Eindelijk

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{D1} T_2 &= -\frac{1}{4\Omega' \text{Sin } 2X_0} (A_D - B_D) \frac{\pi}{\sqrt{\Omega'^2}} \text{Cos } 2\psi_D, \\ \Delta_{D1} T_1 &= \frac{A_D - B_D}{4\Omega' \text{Sin } 2X_0} \frac{\text{Cos } 2\psi_D}{\sqrt{\Omega'^2}} (2\sqrt{X_0^2} + \frac{1}{2} \text{Sin } 4X_0) \text{ voor } X_0 \text{ negatief,} \\ \Delta_{D1} T_1 &= \frac{A_D - B_D}{4\Omega' \text{Sin } 2X_0} \frac{\text{Cos } 2\psi_D}{\sqrt{\Omega'^2}} (\pi - 2X_0 + \frac{1}{2} \text{Sin } 4X_0) \text{ voor } X_0 \text{ positief,} \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Naarmate dus de beginslingering voor of achter de symmetrieas van 't grootste decrement ligt (d. w. zeggen dat deze as door het slingervlak in zijne beweging bereikt wordt of als reeds overschreden gedacht kan worden), wordt de geheele periode verkort of verlengd, de eerste onderperiode verlengd of verkort.

Nu gaan wij over tot de termen, die  $\text{Sin } 2\psi_D$  bevatten.

Deze zijn alleen van invloed op  $T_1$ ,  $\chi_1$  en  $\chi_2$ , en geven

$$\Delta_{\text{DII}} T_1 = \frac{A_D - B_D}{4 \Omega'^2} \text{Sin } 2 X_0 \text{ Sin } 2 \psi_D, \dots \dots (194)$$

hetwelk in teeken aan  $\Delta_{\text{DI}} T_1$  gelijk of tegengesteld is, al naarmate  $\text{Sin } 2 \psi^D$  negatief of positief is. Uit

$$\Delta_{\text{DII}} \chi_1 = \pm \frac{A_D - B_D}{8 \Omega'} \text{Sin } 2 \psi_D \psi'' \text{Cos } 2 X_0 (\pm 1 - \text{Cos } 2 X_0),$$

$$\Delta_{\text{DII}} \chi_2 = \pm \frac{A_D - B_D}{8 \Omega'} \text{Sin } 2 \psi_D \psi'' \text{Cos } 2 X_0 (\pm 1 + \text{Cos } 2 X_0),$$

waar de teekens  $\pm$  op dezelfde wijze als bij de  $\Delta_D$ , worden bepaald, volgt voor

$$\Delta_{\text{DII}} \psi' = - \frac{A_D - B_D}{4 \Omega'} \text{Sin } 2 \psi_D \psi'' \text{Cos } 2 X_0 \dots \dots (195)$$

Wanneer wij ons ten opzichte van de termen, afkomstig van de hogere machten der snelheden tot de tweede bepalen, zal men in

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a_D - \frac{2 \Omega'}{\text{Sin } \psi'} b_D \text{Cos } 2(D + \delta) + \frac{2 \Omega'}{\text{Sin } \psi'} c_D \text{Sin } 2(D + \delta),$$

$$\frac{d\delta}{dt} = - \frac{2 \Omega'}{\text{Sin } \psi'} b'_D \text{Cos } 2(D + \delta) + \frac{2 \Omega'}{\text{Sin } \psi'} c'_D \text{Sin } 2(D + \delta),$$

voor de coëfficiënten  $a_D$ ,  $b_D$ ,  $c_D$ ,  $b'_D$ ,  $c'_D$  dergelijke moeten gebruiken,

waar men volgens (106) alleen  $\frac{8}{3\pi} (A'_D a - B'_D b)$  voor  $A_D - B_D$  in de plaats behoeft te stellen. Evenzoo zal men om de wrijving onafhankelijk van de snelheid te verkrijgen  $\frac{4}{\pi} \left( A_D \frac{1}{a} - B_D \frac{1}{b} \right)$  voor  $A_D - B_D$  in de plaats moeten stellen. Voor de grootheden, die door  $a$  en  $b$  worden aangeduid, zal men echter, als voren de tweede macht van  $\psi''$  verwaarloozende,

$$a = \sqrt{2h_0} e^{-F_0 \frac{t}{2}} \text{Cos}(X + \psi_D), \quad b = \sqrt{2h_0} e^{-F_0 \frac{t}{2}} \text{Sin}(X + \psi_D),$$

kunnen stellen en op deze wijze ook de wrijvings correctien in  $\varepsilon$  en  $\delta$  tengevolge van de hogere machten der snelheden voor dit geval door quadraturen kunnen vinden.

Om den invloed der eindige amplituden te leeren kennen zal men weder de volledige uitdrukkingen (139) van  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i \dots$  niet behoeven te gebruiken, wanneer  $A_D - B_D$  ten opzichte van  $\Omega'$  klein

is. Men mag nu wel niet  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  nul stellen, maar wel, en daarop komt het ten slotte aan, de producten er van met de coëfficiënten van  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , enz. omdat deze alle in de bijbehorende  $\Delta_A X$ ,  $\Delta_A T$  en  $\Delta_A \chi$  den kleinen coëfficiënt  $\psi''$  (door  $\text{Cos } \psi'$  of  $\text{Cos } \varepsilon$ ) of  $\mu_2$  brengen.

#### § 4. *Afwijkingen bij de slingerproef van BRAVAIS.*

Aan het slot van zijne verhandeling<sup>1)</sup> over het bewijs van de aswenteling der aarde met behulp van den conischen slinger, beschrijft BRAVAIS de onregelmatigheden, die zich bij oorspronkelijk cirkelvormige slingeren voordeden.

Tant que l'on se sert du même fil et que la rotation est de même sens, l'orbite supposée primitivement circulaire a une tendance à se changer en une ellipse dont le grand axe offre une direction déterminée. La forme légèrement elliptique que peut avoir l'orbite initiale ne trouble pas sensiblement ce résultat. Si l'ellipticité de l'orbite initiale était inverse de celle que doit avoir l'ellipse finale, l'orbite variable commencerait d'abord par arriver à la forme circulaire ou sensiblement circulaire, circonstance qui retarderait la transformation en ellipse finale..... Si au contraire l'orbite initiale avait une ellipticité analogue de position à l'ellipticité finale, cette circonstance favoriserait son prompt établissement. On voit ainsi, que, pour un même fil, la diminution des amplitudes ne se fait pas avec la même rapidité pour les différents rayons vecteurs de l'orbite. Il est deux positions rectangulaires pour lesquelles la diminution est à son maximum dans l'une et à son minimum dans l'autre.

Si l'on fait tourner le même fil dans le sens inverse, la position du grand axe de l'ellipse finale se déplace. Un défaut d'horizontalité dans la plaque de suspension peut aussi modifier cette position, et faire dégénérer plus rapidement l'orbite en une ellipse sensiblement allongée. Ainsi dans les observations du fil. A, d'occident en orient les 5, 9 et 11 mai, le grand axe de l'orbite finale tendait à se diriger au S 60° O; mais après le redressement de la plaque de suspension, le grand axe s'est dirigé au S 15° O. Pour les rotations d'orient en occident, la différence a été encore plus considérable. En général, lorsqu'on change le sens de la rotation, la position normale du grand axe marche dans le sens de l'ancienne rotation.

<sup>1)</sup> Journ. de Liouv., 1<sup>e</sup> S. T. 19, p. 44.

Ainsi, pour le fil A, avant la rectification de la suspension qui a eu lieu le 13 mai, dans la rotation de l'est à l'ouest, par le sud, le grand axe était situé au S 35° O; en renversant la rotation, il a rétrogradé de 25 degrés et passé au S 60° O.

Pour ce même fil A, après la rectification de la suspension le grand axe situé au S 46° E, lorsque la rotation avait lieu de l'est à l'ouest, a passé au S 15° O; rétrogradation 61 degrés pour le sens de la nouvelle rotation.

Pour le fil B, dans les mêmes conditions S 50° E., et ensuite S 5° E; la rétrogradation est de 55 degrés.

Enfin pour le fil A', les deux positions du grand axe sont S 64° E et S 18° E; rétrogradation de 46 degrés.

Ces résultats semblent indiquer une notable influence exercée par la pièce de suspension; l'état moléculaire des fils près de la suspension semble, au contraire, avoir une faible influence, les trois fils ayant donné sensiblement les mêmes résultats.

La forme du mobile n'a pu d'ailleurs avoir aucune influence appréciable; les cylindres pesants étaient parfaitement tournés, ainsi que toutes les pièces de la suspension inférieure, et la résistance de l'air devait ainsi être constante dans toutes les directions azimuthales.

J'ai eu aussi l'occasion de reconnaître que les courans d'air, soit accidentels, soit déterminés par l'approche de l'observateur, pouvaient troubler un peu le mouvement..... Ces perturbations irrégulières peuvent expliquer, au moins en partie, les différences de forme qu'offrent d'un jour à l'autre les ellipses finales après des rotations du même fil, dirigées dans le même sens.

Je n'ai pas remarqué que les grands axes des ellipses eussent un déplacement lent dans le sens du mouvement diurne, c'est à dire d'orient en occident, comme on pouvait l'inférer à priori du phénomène de déviation observé par M. FOUCAULT; il est à croire que l'action de la terre se borne à déplacer dans ce sens d'un petit nombre de degrés la position d'équilibre que la suspension tend à donner au grand axe, et que cette déviation, étant sensiblement constante dans toutes les séries d'observations du même pendule, reste ainsi inaperçue.

#### § 5. *Verklaring van de afwijkingen bij de proef van BRAVAIS.*

De verklaring van een gedeelte der beschreven afwijkingen althans wordt daardoor geleverd, dat men ze onder het zelfde gezichtspunt met de afwijkingen in de proeven van FOUCAULT brengt.

Laten wij eerst alleen daarop letten, dat de slingertijd van den slinger door de eigenaardige wijze van ophanging in verschillende richtingen verschillend is. De proeven van BRAVAIS toonen het bestaan van deze oorzaak van verandering der slingerbanen aan; immers bij denzelfden slinger bleek de afname der amplituden in verschillende richtingen in de nagenoeg cirkelvormigen baan gemeten, af te hangen van den zin van de beweging in de baan. De afzonderlijke proeven werden niet lang genoeg voortgezet om er uit op te kunnen maken of  $Tg^2 \psi \geq 1$ , maar het is waarschijnlijk, dat  $Tg^2 \psi > 1$  was. Dan behooren de door BRAVAIS waargenomen bewegingsverschijnselen in het algemeen tot de klasse A, die in n°. 28 van 't 1<sup>e</sup> Stuk behandeld werd, en men zal dus niet meer de door BRAVAIS, die  $Tg \psi = \infty$  onderstelt, (zie n°. 50 van het 1<sup>e</sup> Stuk) tot het berekenen van  $\Omega'$  uit de verandering van  $\tau$  gebruikte formule mogen aannemen, maar van de algemeene formule (D) van het 1<sup>e</sup> Stuk gebruik moeten maken, waarbij op dergelijke wijze als in n°. 50 van 't 1<sup>e</sup> Stuk de verandering der ellipsen tengevolge van  $p \geq q$  in aanmerking genomen moet worden. Wij zullen deze vrij omslachtige berekening hier niet ontwikkelen; immers de cardanisch opgehangen slinger stelt ons in staat  $p = q$  te maken en dus de proef van BRAVAIS zonder deze storing te verrichten. Anderzijds geeft n°. 26 van het 1<sup>e</sup> Stuk ons het middel aan de hand om ook wanneer  $q - p$  niet  $= 0$  is, tot een geval te komen, dat theoretisch zeer eenvoudig berekend kan worden. Daartoe kiezen wij in dat geval als oorspronkelijke slingeringsvorm niet den cirkel, maar de onveranderlijke ellipsen van den slinger. Dan wordt volgens (D) en n°. 26

$$\tau - \tau_0 = W_0 I \pi + W_1,$$

$$p W_0 = \left[ \sqrt{\cos^2 \psi} - \left[ \pm \right]^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \right] \frac{p - q}{\sqrt{(p - q)^2}},$$

$$p W_1 = \frac{p - q}{2} (t - I \Pi) + \left[ \pm \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \right]^r \frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}} \operatorname{Arctg}(Tg D) =$$

$$= \frac{p - q}{2} (t - I \Pi) + \left[ \pm \right]^r D,$$

waar  $D$  tusschen  $0$  en  $180^\circ$  in den zin tegengesteld aan  $\Omega'$  genomen moet worden. Dus

$$\begin{aligned}
 p(\tau - \tau_0) &= \frac{p-q}{2} t [\pm] \frac{-\Omega'}{\text{Sin } \psi} t = \\
 &= -[\pm]^r \frac{\Omega'}{\text{Sin } \psi} \left( 1 + \left[ \pm \right], \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} \text{Cos } \psi' \right) t,
 \end{aligned}$$

Dezelfde formule vindt men terstond uit (106) en n°. 26 van 't 1<sup>e</sup> Stuk, daar

$$\text{Cos } T_0 = 0, \quad \text{Sin } T_0 = [\pm]^r \cdot 1, \quad 1 - 2\alpha' = \left[ \pm \right]^r \frac{\text{Cos } \psi}{\sqrt{\text{Cos}^2 \psi}} \text{Cos } \psi',$$

en dus

$$\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} = \frac{1}{2} \text{Sin } \psi', \quad 2\alpha' = 1 - \left[ \pm \right]^r \text{Cos } \psi.$$

$$\text{Uit} \quad p(\tau - \tau_0) = - \left\{ [\pm]^r \frac{\Omega'}{\text{Sin } \psi} + \frac{q-p}{2} \right\} t \dots \dots (196)$$

volgt, dat, wanneer men eene rechts en linksomgaande onveranderlijke ellips vergelijkt, het verschil tusschen de twee slingertijden ten opzichte van de  $y$ , -as eenvoudig

$$\begin{aligned}
 &\frac{2\Omega'}{\text{Sin } \psi'} \cdot \frac{2\pi}{p^2}, \\
 &\frac{2\Omega'}{\text{Sin } \psi'} \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}} t, \dots \dots \dots (197)
 \end{aligned}$$

is, zooals wij in (220) van het 1<sup>e</sup> Stuk voor de proeven van BRAVAIS waar  $\psi' = 90^\circ$  is, vonden.

De onregelmatigheden door BRAVAIS opgemerkt laten zich niet geheel daardoor verklaren, dat men de bewegingsverschijnselen van zijn slinger opvat als behoorende tot de klasse A. Immers dan moest het azimuth, waarbij de groote as der ellipsen uit den cirkel te voorschijn treedt, wanneer de slingeren rechts- of wel linksom plaats hebben  $90^\circ$  verschillen. Wij zullen aantoonen, dat wanneer men de wrijving in aanmerking neemt zulk eene wijziging in de klasse A kan worden voorzien. Uit (178) volgt

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \text{Cos}^2 2\chi}{dt^2} &= -4(1-2\alpha') \text{Sin}^2 T_0 \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} - 8 \text{Cos } T_0 \text{Sin } T_0 \alpha'(1-\alpha') \frac{d^2 T_0}{dt^2} + \\
 &+ 8 \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)^2 \text{Sin}^2 T_0 + 8(\text{Sin}^2 T_0 - \text{Cos}^2 T_0) \alpha'(1-\alpha') \left( \frac{dT_0}{dt} \right)^2 + \\
 &+ \frac{d\alpha'}{dt} \frac{dT_0}{dt} \{ -8(1-2\alpha') \text{Sin } T_0 \text{Cos } T_0 - 8 \text{Sin } T_0 \text{Cos } T_0 (1-2\alpha') \}.
 \end{aligned}$$

Hierin moet genomen worden

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -2\Omega' \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \cos T_0 + \frac{B_D - A_D}{2} \left\{ -2 \cos 2\psi_D \alpha'(1-\alpha') - \right. \\ \left. - \cos T_0 (1-2\alpha') \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \sin 2\psi_D \right\}, \\ \frac{dT_0}{dt} = q-p + \Omega' \frac{1-2\alpha'}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} \sin T_0 + \frac{B_D - A_D}{4} \sin 2\psi_D \frac{\sin T_0}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}};$$

dus voor oorspronkelijk cirkelvormige slingeren, waar

$$1-2\alpha' = 0, \quad 2\sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \cos T_0 = 0, \quad \sin T_0 = [\pm] \cdot \sqrt{\sin^2 T_0},$$

$$\left( \frac{d^2 \cos^2 2\chi}{dt^2} \right)_0 = 8 \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_0^2 + 2 \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_0^2 \text{ bij } t = 0,$$

en wegens

$$\left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_0 = -2 \frac{B_D - A_D}{2} \cos 2\psi_D \left\{ \alpha'(1-\alpha') \right\}_0 = -\frac{B_D - A_D}{4} \cos 2\psi_D, \\ \left( \frac{dT_0}{dt} \right)_0 = q-p + \frac{B_D - A_D}{4} \sin 2\psi_D \frac{\sin T_0}{\sqrt{\alpha'(1-\alpha')}} = \\ = q-p + [\pm] \frac{B_D - A_D}{2} \sin 2\psi_D,$$

wordt

$$\left( \frac{d^2 \cos^2 2\chi}{dt^2} \right)_0 = \frac{1}{2} (B_D - A_D)^2 + 2(q-p)^2 + \\ + 2(q-p)(B_D - A_D) \sin 2\psi_D \sin T_0 = \frac{1}{2} \left\{ (B_D - A_D)^2 + 4(q-p)^2 \right\} + \\ + [\pm]^2 2(q-p)(B_D - A_D) \sin 2\psi_D.$$

Hiermede wordt wegens

$$\cos^2 2\chi = \cos^2 2\chi_0 + \left( \frac{d}{dt} \cos^2 2\chi \right)_0 t + \frac{t^2}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} \cos^2 2\chi \right)_0,$$

$$\text{en} \quad \cos 2\chi_0 = 0, \quad \left( \frac{d \cos 2\chi}{dt} \right)_0 = 0,$$

$$\cos^2 2\chi = \frac{t^2}{4} \left\{ (B_D - A_D)^2 + 4(q-p)^2 + [\pm]^2 4(q-p)(B_D - A_D) \sin 2\psi_D \right\},$$

$$\cos 2\chi = \frac{t}{2} \sqrt{(B_D - A_D)^2 + 4(q-p)^2 + [\pm]^2 4(q-p)(B_D - A_D) \sin 2\psi_D}. \quad (198)$$

Verder kan men ook  $\cos 2\chi \cos 2\chi$  gemakkelijk als functie van den tijd uitdrukken

$$\cos 2\chi \cos 2\chi = \cos 2\chi_0 \cos 2\chi_0 + \left( \frac{d(1-2\alpha')}{dt} \right)_0 t + \text{enz.},$$

$$\cos 2 X \cos 2 \chi = -2 \left( \frac{d\alpha'}{dt} \right)_0 t = \frac{B_D - A_D}{2} \cos 2 \psi_D t.$$

Hieruit volgt

$$\cos 2 X = \frac{(B_D - A_D) \cos 2 \psi_D}{\sqrt{(B_D - A_D)^2 + 4(q-p)^2} [\pm]^r 4(q-p) (B_D - A_D) \sin 2 \psi_D}. \quad (199)$$

Eindelijk vindt men  $\sin 2 X$  als volgt

$$\begin{aligned} \sin 2 X \cos 2 \chi &= \left\{ \frac{d}{dt} 2 \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \right\}_0 t \dots = \\ &= - \left\{ 2 \frac{dT_0}{dt} \sin T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \right\}_0 = - \left\{ [\pm]^r \frac{dT_0}{dt} \right\}_0 = \\ &= - [\pm]^r (q-p) - \frac{B_D - A_D}{2} \sin 2 \psi_D, \end{aligned}$$

en

$$\sin 2 X = \frac{-[\pm]^r 2(q-p) - (B_D - A_D) \sin 2 \psi_D}{\sqrt{(B_D - A_D)^2 + 4(q-p)^2} [\pm]^r 4(q-p) (B_D - A_D) \sin 2 \psi_D}. \quad (200)$$

Bij verandering van  $[\pm]^r$  gaat  $\sin 2 X$  of  $\cos 2 X$  niet in de tegengestelde waarde over; dus is het verschil van het azimuth, waarbij de groote as uit positieve, en van het azimuth, waarbij de groote as uit negatieve cirkels opduikt, niet, als in het theoretisch geval der klasse A,  $90^\circ$ .

### § 6. *Onveranderlijke ellipsen onder den invloed der wrijving.*

De eindtoestand van de klasse CII, van zwevingen om de coördinatenas in wier richting de slingeren het langzaamst afnemen wordt geleverd door dergelijke ellipsen als de klasse E in het theoretisch eenvoudige geval. Wij vinden dezen eindtoestand door de vergelijkingen

$$\frac{dX}{dt} = -\Omega' - [\pm]^r \cos 2 X \operatorname{Tg} 2 \chi \frac{q-p}{2} + \frac{A_D - B_D}{4} \frac{\sin 2(X + \psi_D)}{\cos 2 \chi} = 0,$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{A_D - B_D}{4} \sin 2 \chi \cos 2(X + \psi_D) + [\pm]^r \sin 2 X \frac{q-p}{2} = 0$$

(zie 180, 182, 183) op te lossen. In anderen vorm is de laatste

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{A_D - B_D}{4} \sin 2 \chi \cos 2 \psi_D \cos 2 X + \\ &+ \left[ [\pm]^r \frac{q-p}{2} - \frac{A_D - B_D}{4} \sin 2 \chi \sin 2 \psi_D \right] \sin 2 X = 0, \dots (201) \end{aligned}$$

$$\text{of} \quad \text{Tg } 2X = \frac{(A_D - B_D) \text{Sin } 2\chi \text{ Cos } 2\psi_D}{(A_D - B_D) \text{Sin } 2\chi \text{ Sin } 2\psi_D - [\pm]^r 2(q-p)},$$

terwijl  $\chi$  dan door de eerste vergelijking bepaald wordt, nl. door

$$\begin{aligned} \Omega' = & \left( \frac{A_D - B_D}{4} \text{Sin } 2\psi_D - \frac{q-p}{2} \text{Sin } 2\chi \right) \frac{\text{Cos } 2X}{\text{Cos } 2\chi} + \\ & + \frac{A_D - B_D}{4} \frac{\text{Cos } 2\psi_D}{\text{Cos } 2\chi} \text{Sin } 2X, \quad (202) \end{aligned}$$

welke van den vierden graad in  $\text{Sin } 2\chi$  is.

Wij zullen de oplossing slechts nagaan voor 't geval, dat  $\psi_D = 0$ , dan wordt

$$\begin{aligned} \text{Tg } 2X &= -f \text{Sin } 2\chi, \\ \frac{\Omega' \text{Cos } 2\chi}{\text{Cos } 2X} &= \lambda \text{Sin } 2\chi, \end{aligned}$$

stellende

$$f = [\pm]^r \frac{A_D - B_D}{2(q-p)}, \quad \lambda = -\frac{q-p}{2} - \frac{A_D - B_D}{4} f.$$

Waaruit volgt

$$\text{Sin}^2 2\chi = -\left( \frac{1}{2f^2} + \frac{\lambda^2}{2f^2\Omega'^2} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{1}{f^2} + \left( \frac{1}{2f^2} + \frac{\lambda'^2}{2f^2\Omega'^2} - \frac{1}{2} \right)^2}.$$

zoodat in dit geval slechts twee oplossingen, een voor  $[+]$ <sup>r</sup> en een voor  $[-]$ <sup>r</sup>, mogelijk blijken te zijn.

## HOOFDSTUK IV.

### UITBREIDINGEN VAN HET ONDERZOEK IN DE VORIGE HOOFDSTUKKEN.

[1] In Hoofdst. II § 1 [6] vonden wij, dat de term  $U'_{\varphi\theta} \varphi\theta$  in de storingsfunctie  $S$  (zie (41) en (43)) geen anderen invloed op de verschijnselen heeft, dan dat voor  $\psi_D$  een andere waarde in de plaats treedt. Hierbij werd, als overal in Hoofdst. II en ook reeds bij de

benaderde integratie in I § 7 ondersteld, dat  $U'_{\varphi\theta}$  klein ten opzichte van  $p - q$  en  $\Omega'$ , en dus eene grootheid van de derde orde is. In Hoofdst. I § 1 werd echter betoogd, dat in 't algemeen  $U'_{\varphi\theta}$  van de tweede orde kan zijn, en eene uitbreiding van ons onderzoek tot dit geval blijkt dus wenschelijk. Eene andere splitsing van de karakteristieke functie van ons vraagstuk in de karakteristieke functie van eene ongestoorde beweging en eene storingsfunctie stelt ons echter in staat de afzonderlijke beschouwing van  $U'_{\varphi\theta}$  van den aanvang af overbodig te maken. Wij voeren daartoe weer als in I § 1 in plaats van  $\xi$  en  $\eta$  andere coördinaten  $\phi$  en  $\theta$  in, maar laten voorloopig den hoek  $\psi_D$  in de vergelijkingen (24) onbepaald, en zien dus verder af van de vergelijking (27). De levende kracht  $T$  neemt dan overeenkomstig met (25) den vorm

$$\frac{1}{2} A_0 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} B_0 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + C_0 \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt}$$

aan, terwijl voor  $M''$ ,  $M'$  en  $U'_{\varphi\theta}$  weder de vergelijkingen (74\*) met de nieuwe waarde van  $\psi_D$  gelden. In de ontwikkelingen, die tot (40) voeren, wordt geen gebruik gemaakt van de eigenschap, dat  $C_0 = 0$  is; zij blijven dus gelden voor onze nieuwe waarde  $\psi_D$ . En wanneer men de termen met den coëfficiënt  $C_0$  uit  $E$  in  $S$  overbrengt (zie (41) en (42)), verkrijgen wij, zoodra  $\psi_D$  zoo gekozen is, dat  $C_0$  van de tweede orde is en men dus in den noemer van (42)  $A_0 B_0$  in plaats van  $A_0 B_0 - C_0^2$  mag stellen, weder (46), terwijl bij de storingsfunctie  $S$  (zie (43)) gevoegd moet worden  $-\frac{C_0 p'_1 p'_2}{A_0 B_0}$  (vergelijk (48)). Daar  $C_0$  van de tweede orde is blijven de verdere omvormingen van de storingsfunctie geldig en zal men ten slotte als uitdrukking van de storingsfunctie weder (55) krijgen, waaraan nu moet worden toegevoegd

$$-\frac{C_0 p'_1 p'_2}{A_0 B_0} = -\frac{2C_0}{A_0} \sqrt{\alpha(\bar{h}-\alpha)} \text{Cos } q t'' \text{Cos } p t'.$$

Hetgeen er van dezen term voor de verandering der elementen volgens de redeneering in I § 2 in aanmerking komt, kunnen wij met

$-\frac{U'_{\varphi\theta}}{M} \sqrt{\alpha(\bar{h}-\alpha)} \text{Cos } T_0$  samenvatten tot

$$-\left( \frac{C_0}{A_0} + \frac{U'_{\varphi\theta}}{M} \right) \sqrt{\alpha(\bar{h}-\alpha)} \text{Cos } T_0.$$

De keuze van  $\psi_D$ , tot nog toe alleen bepaald door de eigenschap dat  $C_0$  van de tweede orde moet zijn, ligt nu voor de hand; immers deze term valt uit de storingsfunctie weg wanneer  $\psi_D$  zoo gekozen is, dat

$$-MC_0 = A_0 U'_{\varphi\theta},$$

waardoor tevens  $C_0$  eene grootheid van de tweede orde wordt. Dit vordert volgens (26) eenerzijds en (74\*) anderzijds

$$Tg 2\psi_D = \frac{MA^{\xi\eta} + A_0 U'_{\xi\eta}}{M(A^{\xi\xi} - A^{\eta\eta}) + A_0(U'_{\xi\xi} - U'_{\eta\eta})} \dots (203)$$

Wanneer wij aan  $\psi_D$  de hierdoor bepaalde waarde toekennen kunnen wij verder in de vroegere ontwikkelingen overal  $U'_{\varphi\theta} = 0$  stellen, terwijl deze overigens onveranderd geldig blijven, en nu het voordeel hebben als ongestoorde beweging die te beschouwen, welke de slinger bij oneindig kleine amplituden zou vertoonen onder de werking van de zwaartekracht alleen. Deze uitkomst komt overeen met die van pg. 157, daar de hoek der scheefhoekige coördinatenassen bij onzen slinger, waar  $A_0 B_0$  eenerzijds en  $M''$ ,  $M'$  anderzijds slechts ten bedrage van grootheden van de tweede orde verschillen, eveneens van de tweede orde is.

[2] Laten wij nu nog nagaan hoe men in dit geval van een gegeven (waargenomen) waarde van  $\psi_D$  en  $\Pi$  tot eene willekeurige andere overgaat. Daartoe merke men weer overeenkomstig met pg. 159 op, dat

$$\begin{aligned} \frac{B_0 - A_0}{B_0} + \frac{M'' - M'}{M} &= \frac{-2}{A_0 M} [\{A_0(U'_{\xi\xi} - U'_{\eta\eta}) + \\ &+ M(A^{\xi\xi} - A^{\eta\eta})\} \text{Cos } 2\psi_D + (A_0 U'_{\xi\eta} + M A^{\xi\eta}) \text{Sin } 2\psi_D] = - \\ &= -2 \frac{MA^{\xi\eta} + A_0 U'_{\xi\eta}}{A_0 M \text{Sin } 2\psi_D} \end{aligned}$$

en voor andere waarden  $\psi'_D$  en  $\Pi'$ , na toevoeging van gewichten bepaald door  $F$  en  $f$

$$\begin{aligned} \left(\frac{B_0 - A_0}{B_0} + \frac{M'' - M'}{M}\right)' &= \frac{-2}{A_0 M} [\{A_0(U'_{\xi\xi} - U'_{\eta\eta}) + M(A^{\xi\xi} - A^{\eta\eta}) + \\ &+ MF \text{Cos } 2f\} \text{Cos } 2\psi'_D + (A_0 U'_{\xi\eta} + M A^{\xi\eta} - MF \text{Sin } 2f) \text{Sin } 2\psi'_D] = - \\ &= -2 \frac{MA^{\xi\eta} + A_0 U'_{\xi\eta} - MF \text{Sin } 2f}{A_0 M \text{Sin } 2\psi'_D}; \end{aligned}$$

zoodat

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1 A_0}{\pi} \Omega' \{ (Cotg \psi)' \sin 2\psi_D - Cotg \psi \sin 2\psi_D \} &= F \sin 2f, \\ \frac{T_1 A_0}{\pi} \Omega' \{ (Cotg \psi)' \cos 2\psi_D - Cotg \psi \cos 2\psi_D \} &= -F \cos 2f; \end{aligned} \right\} (204)$$

geheel als in het meer eenvoudige geval, dat  $U_{\xi_2} - U'_{\eta_2} = U_{\xi\eta} = 0$ .

[3] Ten slotte kan men nog gemakkelijk de vorige onderzoekingen, die volgens pg. 140  $R$  van de eerste orde onderstellen, uitbreiden tot het geval van eene willekeurige waarde van  $R$ . Met het oog daarop zijn verschillende termen in de ontwikkelingen medegenomen, die in de onderstelling, dat  $R$  klein van de eerste orde is, niet van invloed op de verschijnselen kunnen worden. Dit zijn alle termen in I § 7, die  $\mu_2$  bevatten, daar de benaderde integratie in I § 7 zulk eene waarde van  $h$  onderstelt, dat de storingen ten gevolge van de eindige amplituden de verschijnselen slechts weinig wijzigen, zoodat de termen welke buitendien den factor  $R$  bevatten, wanneer deze klein van de 1<sup>e</sup> orde is, wegvallen. Overgaande tot het geval, dat  $R$  eene willekeurige waarde heeft, behoeven wij nog slechts den eenigen term aan de storingsfunctie toe te voegen, die tot nog toe weggelaten werd gebruik makende van de onderstelling, dat  $R$  klein van de eerste orde is, nl. door in (73) te stellen

$$A_{\xi_2}^{\xi\eta} = 0 \text{ in plaats van } A_{\xi_2}^{\xi\eta} = -m_2 R.$$

Daar deze term den kleinen factor  $m_2$  bevat kan men hem in de beschouwingen van I § 7 op grond van de zoo even gevolgde redeneering van den aanvang af weglaten. Volledigheidshalve zullen wij echter aangeven welken term hij bij de storingsfunctie  $S_A + S_\psi$ , zie pg. 145, afkomstig van de eindige amplituden voegt, en in deze berekening tegelijkertijd een voorbeeld van eene andere behandeling dier storingsfunctie geven.

Met (74) en (49<sup>b</sup>) volgt er uit, dat aan  $A$ ,  $B$ ,  $C$  moet worden toegevoegd  $A_0 A'_{\xi_2} \xi^2$ ,  $B_0 B'_{\xi_2} \xi^2$ ,  $A_0 B_0 C'_{\xi_2} \xi^2$ , wanneer

$$A'_{\xi_2} = -\frac{m_2 R}{A_0} \sin 2\psi_D, \quad B'_{\xi_2} = \frac{m_2 R}{B_0} \sin 2\psi_D, \quad C'_{\xi_2} = -\frac{m_2 R}{A_0 B_0} \cos 2\psi_D.$$

Als in (50) komt dus bij de storingsfunctie

$$S_{Rm_2} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{p_1'^2}{A_0} A'_{\xi_2} - \frac{1}{2} \frac{p_2'^2}{B_0} B'_{\xi_2} - p'_1 p'_2 C'_{\xi_2} \right] \xi^2$$

of voor  $p'_1$ , zoodat daar, stellende  $A_0 \frac{d\phi}{dt}$  en voor  $p'_2$   $B_0 \frac{d\theta}{dt}$ ,

$$\frac{m_2 R}{2} \left\{ \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin 2\psi_D - \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin 2\psi_D + 2 \frac{d\phi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \cos 2\psi_D \right\} \xi^2,$$

dus met (24)

$$S_{Rm_2} = \frac{m_2 R}{2} \frac{d\eta}{dt} \frac{d\xi}{dt} \xi^2.$$

Deze storingsfunctie moet nu verder in de elementen worden uitgedrukt; volgens (93<sup>b</sup>)

$$S_{Rm_2} = \frac{m_2 R}{2} \frac{a b a^3}{M M} p^2 \sin^2 p t''' \cos' p t''' + \psi) \cos p t''',$$

waarvan alleen weer

$$S_{Rm_2} = \frac{m_2 R}{2} \frac{a^3 b}{M^2} p^2 \overline{\sin^2 p t''' \cos^2 p t'''} \cos \psi = \frac{m_2 R M}{16 A_0} a^3 b \cos \psi$$

volgens pg. 136 in aanmerking komt; zoodat de storingsfunctie vermeerderd wordt met

$$\frac{R M m_2 h^2}{8 A_0} \left( 1 + (1 - 2\alpha') \cos 2\psi_D - \right. \\ \left. - \sin 2\psi_D \cos T_0 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \right) \left( (1 - 2\alpha') \sin 2\psi_D + 2 \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \cos T_0 \cos 2\psi_D \right).$$

# **PROEFONDERVINDELIJK GEDEELTE.**



## INLEIDING.

In Hoofdstuk II van het Wiskundig gedeelte 1<sup>e</sup> Stuk heb ik de aandacht gevestigd op nieuwe proefondervindelijke bewijzen voor de aswenteling der aarde, die in het volgende meer uitvoerig zullen worden behandeld. Zij berusten op de kennis van de storingen van de beweging van een punt door de draaiing van een coördinatenstelsel, ten opzichte waarvan het, afgezien van die draaiing, de figuren van LISSAJOUS voor twee nagenoeg gelijke slingertijden in twee loodrecht op elkaar staande richtingen zou vertoonen. De kleine bewegingen van het zwaartepunt van een cardanisch opgehangen slinger aan het oppervlak der aarde zijn het geschikst om die gestoorde bewegingen proefondervindelijk na te gaan.

Daar ik met het 1<sup>e</sup> Stuk van het Wiskundig gedeelte mij echter tevens ten doel stelde toepassingen van de methode van HAMILTON-JACOBI op vraagstukken der mechanica te leveren en met behulp daarvan ook andere storingen bij mijn slinger in het 2<sup>e</sup> Stuk te onderzoeken, is voor de afleiding van de formules, die wij hier noodig hebben, niet de meest elementaire vorm gekozen. In Hoofdstuk I van dit gedeelte worden die uitkomsten zoo eenvoudig mogelijk afgeleid, zoodat het proefondervindelijk onderzoek in hoofdtrekken ten minste gemakkelijk is te volgen.

De overeenstemming van de beweging van den cardanischen slinger met deze theorie levert een nieuw bewijs voor de draaiing der aarde in denzelfden zin als de proeven van REICH over den vrijen val, de gyroscopbewegingen en de slingerproeven van FOUCAULT en BRAVAIS dit zijn. De beste toetssteen voor deze overeenstemming is de berekening van de ons nauwkeurig bekende draaiingssnelheid der aarde uit de waargenomen verschijnselen, zooals wij die in § 4 van Hoofdstuk I uiteen zullen zetten. In §§ 1 . . . 5 van Hoofdstuk II

zullen wij beschrijven hoe de toestel en de proeven het doelmatigst worden ingericht (zie ook Hoofdst. III § 8) om eene nauwkeurigheid te bereiken, die bij die der proeven van FOUCAULT niet achterstaat.

Het was door toevallige storingen (zie Hoofdstuk III § 1) moeilijk experimenteel eene wet te ontdekken in de regelmatige afwijkingen van theorie en waarneming, die bij mijne proeven voorkwamen en aanvankelijk in sommige bijzondere gevallen de verschijnselen geheel onbegrijpelijk maakten.

Deze afwijkingen leidden tot tweeerlei theoretische ontwikkelingen die het onderwerp van het 2<sup>e</sup> Stuk uitmaakten. In § 3 en § 4 van Hoofdstuk I werd daar de invloed van de afwijkingen van den slinger van de eenvoudigste onderstellingen over zijne inrichting onderzocht en zeer onwezentlijk bevonden. In § 5 werd de invloed van de wrijving, waarin de voornaamste oorzaak der afwijkingen van theorie en waarneming gezocht moet worden, volgens de wetten, die de proefneming aan de hand deed, berekend. Voor dit gedeelte ligt de kern van het 2<sup>e</sup> Stuk in de discussie (Hoofdstuk II) der afwijkingen, die bij het doen van de nieuwe slingerproef voorkomen kunnen en op zich zelf tot eene opmerkelijke groep van verschijnselen aanleiding geven; terwijl het ons tevens leert, welke verbeteringen in de waarnemingen moeten worden aangebracht om ze tot het eenvoudige theoretische geval terug te brengen, en hoe men de belangrijkste afwijkingen eenvoudig elimineeren kan.

---

# HOOFDSTUK I.

## ELEMENTAIRE AFLEIDING DER BEWEGINGSVERSCHIJNSELEN, DIE AAN DE NIEUWE BEWIJZEN VOOR DE ASWENTELING DER AARDE TEN GRONDSLAG LIGGEN.

---

### § 1.

Wanneer een stoffelijk punt bij zijne beweging in een bepaald plat vlak moet blijven, en het naar elk der rechthoekige coördinatenassen van een coördinatenstelsel der  $x_i$  en  $y_i$  aangetrokken wordt door eene kracht evenredig aan den afstand tot elk der coördinatenassen, zijn de krachtontbondenen volgens dezelfde assen

$$X_i = -p^2 x_i, \quad Y_i = -q^2 y_i, \quad \dots \dots \dots (1)$$

waar  $p^2$  en  $q^2$  positieve standvastigen zijn, en de differentiaalvergelijkingen voor de beweging

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -p^2 x_i, \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -q^2 y_i, \quad \dots \dots \dots (2)$$

als de massa van het punt = 1 wordt aangenomen.

Daar hierbij de integraalvergelijkingen

$$x_i = \mu_1 \text{Sin}(pt - \tau_1), \quad y_i = \mu_2 \text{Sin}(qt - \tau_2), \quad \dots \dots (3)$$

die ieder op zich zelf eene harmonische slingering voorstellen, behooren, is de beweging van het punt in 't algemeen samengesteld uit twee enkelvoudige slingeringen in loodrecht op elkaar staande richtingen. De amplituden dier slingeringen zijn  $\mu_1$  en  $\mu_2$ , de slin-

gertijden  $\frac{2\pi}{p}$  en  $\frac{2\pi}{q}$ ;  $\tau_1$  en  $\tau_2$  bepalen de phase van de beide slingeren bij  $t = 0$ . In plaats van deze twee vergelijkingen kunnen wij ook, stellende

$$t_0 = pt - \tau_1, \quad T_0 = (q - p)t + \tau_1 - \tau_2,$$

$$x_i = \mu_1 \text{Sin } t_0, \quad y_i = \mu_2 \text{Sin}(t_0 + T_0);$$

of eindelijk ook met  $\lambda_1 = \mu_2 \text{Cos } T_0$  en  $\lambda_2 = \mu_2 \text{Sin } T_0$

$$x_i = \mu_1 \text{Sin } t_0, \quad y_i = \lambda_1 \text{Sin } t_0 + \lambda_2 \text{Cos } t_0 \dots (4)$$

schrijven.

Wanneer  $p$  en  $q$  zeer weinig verschillen zal  $(p - q)t$  eene grootheid zijn, die bij het aangroeien van den tijd veel langzamer verandert dan  $pt$ , en zal men in eerste benadering de verandering van  $x_i$  en  $y_i$  gedurende eene slingering vinden door  $T_0$  als standvastig te beschouwen. De beweging van het punt wijkt dus gedurende eene slingering slechts onmerkbaar af van eene ellips, wier vergelijking,

$$\mu_1 y_i^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) x_i^2 - 2\lambda_1 \mu_1 x_i y_i = \lambda_2^2 \mu_2^2,$$

men vindt door  $t_0$  uit de vergelijkingen (4) te elimineeren. Deze ellips verandert langzaam maar blijft steeds rakende aan denzelfden rechthoek met aan de coördinatenassen evenwijdige zijden. Het punt doorloopt dus bij zijne beweging de figuren van LISSAJOUS voor nagenoeg gelijke slingertijden in twee richtingen loodrecht op elkaar.

Wanneer nu de coördinatenassen ten opzichte waarvan de krachten  $X_i$ ,  $Y_i$  genomen zijn, niet vast zijn, maar met de hoeksnelheid  $\gamma$  om eene door den oorsprong der coördinaten gaande as draaien in den zin, die bij eene draaiing  $\frac{\pi}{2}$  de  $+x_i$ -as in den vroegeren stand der  $y_i$ -as zou brengen, zoo worden de vergelijkingen der betrekkelijke beweging ten opzichte van de bewegende coördinatenassen andere, die men als volgt vindt.

Noemt men de coördinaten van een punt ten opzichte van het  $x_i y_i$ -stelsel in zijne ligging bij  $t = 0$   $x_0$  en  $y_0$ , zoo staan de coördinaten van het zelfde punt ten opzichte van de bewegende coördinatenassen tot hen in het volgende verband.

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 \text{Cos } \gamma t + y_0 \text{Sin } \gamma t, \\ y_i &= y_0 \text{Cos } \gamma t - x_0 \text{Sin } \gamma t. \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Voert men in de uitdrukking van het beginsel van D'ALEMBERT

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} \delta x_0 + \frac{d^2 y_0}{dt^2} \delta y_0 = X_0 \delta x_0 + Y_0 \delta y_0,$$

waar de virtueele verplaatsingen door  $\delta$  en de krachtontbondenen ten opzichte van het  $x_0, y_0$ -stelsel door  $X_0, Y_0$  aangeduid zijn, de coördinaten  $x_i, y_i$  in; en let men er op, dat rechts voor de uitdrukking van de virtueele arbeid terstond de uitdrukking van dezelfde grootheid in de  $x_i, y_i$ -coördinaten, nl.

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i$$

geschreven kan worden, zoo vindt men

$$\begin{aligned} \frac{d'x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d'y_i}{dt^2} \delta y_i + 2\gamma \left( \frac{dx_i}{dt} \delta y_i - \frac{dy_i}{dt} \delta x_i \right) = \\ = -p^2 x_i \delta x_i - q^2 y_i \delta y_i + \text{enz.;} \end{aligned}$$

waar onder enz. grootheden begrepen zijn, die de tweede macht van  $\gamma$  bevatten, en die dus weggelaten mogen worden wanneer wij, zooals wij van nu af zullen doen,  $\gamma$  oneindig klein onderstellen.

Wegens de onafhankelijkheid van  $\delta x_i$  en  $\delta y_i$  worden dus de differentiaalvergelijkingen voor de beweging van het punt ten opzichte van de draaiende assen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -p^2 x_i + 2\gamma \frac{dy_i}{dt}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -q^2 y_i - 2\gamma \frac{dx_i}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

De integralen van deze vergelijkingen hebben den vorm

$$x_i = a \cos(mt + \rho), \quad y_i = b \sin(mt + \rho), \dots \dots \dots (8)$$

wanneer  $a$  en  $\rho$  willekeurige standvastigen,  $m$  en  $\frac{b}{a}$  passend gekozen zijn. Volgens de substitutie in (7) moet nl.

$$a(p^2 - m^2) - 2\gamma m b = 0,$$

$$b(q^2 - m^2) - 2\gamma m a = 0,$$

dus

$$\frac{b}{a} = \frac{p^2 - m^2}{2\gamma m} = \frac{2\gamma m}{q^2 - m^2}, \dots \dots \dots (9)$$

$$(p^2 - m^2)(q^2 - m^2) - 4\gamma^2 m^2 = 0, \dots \dots \dots (10)$$

zijn.

Duiden wij beide wortels van (10), wier kwadraatwortels wij op hunne beurt steeds positief nemen mogen, met  $m_1^2$  en  $m_2^2$ , en door  $a_1, a_2, \tau_1, \tau_2$  vier willekeurige standvastigen aan, zoo is volgens de theorie der simultane lineaire differentiaalvergelijkingen de algemeene integraal van (7)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(m_1 t + \tau_1) + a_2 \cos(m_2 t + \tau_2), \\ y_1 &= b_1 \sin(m_1 t + \tau_1) + b_2 \sin(m_2 t + \tau_2), \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

waar  $b_1$  en  $b_2$  uit (9) gevormd zijn, door voor  $a$  en  $m$  de eene maal  $a_1$  en  $m_1$  en de andere maal  $a_2$  en  $m_2$  te nemen. Wij zullen nu de vergelijking (10) oplossen, daarbij stellende, dat  $p-q$  en  $\gamma$  oneindig klein zijn.

$$\begin{aligned} m^4 - (p^2 + q^2 + 4\gamma^2)m^2 &= -p^2 q^2, \\ m^2 - \frac{p^2 + q^2 + 4\gamma^2}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 4\gamma^2)^2 - p^2 q^2}. \end{aligned}$$

Daar  $\gamma$  en  $p-q$  oneindig klein zijn tegenover  $m$  en  $p$ , kan men in 't eerste lid  $(p-q)^2$  en  $\gamma^2$  tegen  $m^2$  en  $p^2$  verwaarloozen. Dus

$$q^2 = (p - (p-q))^2 = p^2 - 2p(p-q),$$

$$m^2 - p^2 + p(p-q) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 + q^2)^2 - 4p^2 q^2 + 8\gamma^2(p^2 + q^2) + 16\gamma^4}.$$

De grootheid onder 't wortelteeken is van de tweede orde oneindig klein, dus kan men  $\gamma^2(p^2 - q^2)$ ,  $\gamma^4$ ,  $(p-q)^3$  verwaarloozen en wordt

$$m^2 - p^2 = -p(p-q) \pm \sqrt{(p-q)^2 p^2 + 4\gamma^2 p^2}.$$

Stellen wij nu

$$\frac{2\gamma}{p-q} = Tg \psi, \dots (12)$$

waarbij wij  $\psi$  steeds tusschen 0 en 180° zullen kiezen, zoo wordt

$$m^2 - p^2 = 2\gamma p \{-Cotg \psi \pm Cosec \psi\}$$

en omdat het tweede lid oneindig klein is,

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= p - \gamma \left( \frac{\cos \psi - 1}{\sin \psi} \right) = p + \gamma Tg \frac{1}{2} \psi, \\ m_2 &= p - \gamma \left( \frac{\cos \psi + 1}{\sin \psi} \right) = p - \gamma Cotg \frac{1}{2} \psi. \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

Verder volgens (9)

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{p^2 - m_1^2}{2\gamma m_1} = -\frac{p}{m_1} Tg \frac{1}{2} \psi = -Tg \frac{1}{2} \psi,$$

omdat  $p$  en  $m_1$  slechts oneindig weinig verschillen.

$$\text{Evenzoo} \quad \frac{b_2}{a_2} = \frac{2\gamma p Cotg \frac{1}{2} \psi}{2\gamma m_2} = Cotg \frac{1}{2} \psi.$$

$$\text{Dus ook} \quad -\frac{b_1}{a_1} = \frac{a_2}{b_2} = Tg \frac{1}{2} \psi \dots (14)$$

Bij de berekening van  $\frac{b}{a}$  mag men grootheden van de eerste orde verwaarloozen, daar zij slechts met periodische grootheden vermenigvuldigd voorkomen.

Nu zullen wij de vergelijkingen (11) een voor de discussie meer geschikt vorm geven. Men heeft nl.

$$\begin{aligned} x_i &= a_1 \cos(m_1 t + \tau_1) + a_2 \cos(m_2 t + \tau_2) = \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2) (\cos(m_1 t + \tau_1) + \cos(m_2 t + \tau_2)) + \\ &+ \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\cos(m_1 t + \tau_1) - \cos(m_2 t + \tau_2)), \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a_1 + a_2) (\cos(m_1 t + \tau_1) + \cos m_2 (t + \tau_2)) &= \\ &= (a_1 + a_2) \cos(D + \delta) \cos T, \end{aligned}$$

wanneer

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{m_2 - m_1}{2} t, & T &= \frac{m_1 + m_2}{2} t + \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \\ \delta &= \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

is. De integraalvergelijkingen (11) kan men dus schrijven

$$\begin{aligned} x_i &= (a_1 + a_2) \cos(D + \delta) \cos T + (a_1 - a_2) \sin(D + \delta) \sin T, \\ y_i &= (b_2 - b_1) \sin(D + \delta) \cos T + (b_1 + b_2) \cos(D + \delta) \sin T. \end{aligned}$$

Volgens (13) en (15) is

$$D = -\frac{\gamma}{\sin \psi} t, \quad T = (p - \gamma \cot \psi) t + \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \dots (17)$$

Daar  $D$  slechts oneindig weinig ten opzichte van de aangroeiing van  $T$  verandert, kan men deze gedurende eene slingingering als standvastig beschouwen en dus de beweging als in eene ellips met veranderlijke elementen plaats vindende beschouwen. Noem nu

$$\left. \begin{aligned} (a_1 + a_2) \cos(D + \delta) &= \lambda, & (a_1 - a_2) \sin(D + \delta) &= \mu, \\ (b_2 - b_1) \sin(D + \delta) &= \lambda', & (b_1 + b_2) \cos(D + \delta) &= \mu', \end{aligned} \right\} (18)$$

dan wordt de vergelijking voor de slingeringsellips op een bepaald oogenblik door eliminatie uit

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \lambda \cos T + \mu \sin T, \\ y_i &= \lambda' \cos T + \mu' \sin T, \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

verkregen; wij schrijven er voor

$$A x_i^2 + B y_i^2 + C x_i y_i = D, \dots (20)$$

waar

$$\left. \begin{aligned} A &= \lambda'^2 + \mu'^2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 b_2 \cos 2(D + \delta), \\ B &= \lambda^2 + \mu^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2(D + \delta), \\ C &= -2(\mu\mu' + \lambda\lambda') = -2(b_2 a_1 - b_1 a_2) \sin 2(D + \delta). \end{aligned} \right\} (21)$$

Voert men hier nu den hoek  $\psi$  en verder  $\epsilon'$  in, bepaald door

$$\frac{b_2}{a_2} = \text{Tg } \frac{1}{2} \epsilon', \dots \dots \dots (22)$$

zoo komt

$$\left. \begin{aligned} A &= a_1 a_2 \left\{ \text{Tg } \frac{1}{2} \psi \text{ Cotg } \frac{1}{2} \epsilon' + \text{Tg } \frac{1}{2} \epsilon' \text{ Cotg } \frac{1}{2} \psi - 2 \cos 2(D + \delta) \right\}, \\ B &= a_1 a_2 \left\{ \text{Cotg } \frac{1}{2} \psi \text{ Cotg } \frac{1}{2} \epsilon' + \text{Tg } \frac{1}{2} \epsilon' \text{ Tg } \frac{1}{2} \psi + 2 \cos 2(D + \delta) \right\}, \\ C &= -2 a_1 a_2 (\text{Tg } \frac{1}{2} \psi + \text{Cotg } \frac{1}{2} \psi) \sin 2(D + \delta). \end{aligned} \right\} (23)$$

Wij hebben eene ellips

$$A x_i^2 + B y_i^2 + C x_i y_i = D,$$

bij formule (98) van het 1<sup>e</sup> Stuk vergeleken met eene andere, wier as in den zin naar de  $y_i$ -as toe  $X$  van de  $x_i$ -as afwijkt en wier vergelijking ten opzichte van de richting  $\eta$  der groote (2a) en  $\xi$  der kleine (2b) as

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = a^2 b^2$$

is, en kunnen daarheen verwijzen, wat betreft het bewijs van

$$\frac{A}{D} = \frac{\sin^2 X}{b^2} + \frac{\cos^2 X}{a^2}; \quad \frac{B}{D} = \frac{\cos^2 X}{b^2} + \frac{\sin^2 X}{a^2}; \quad \frac{C}{2D} = \frac{\sin X \cos X}{a^2 b^2} (b^2 - a^2).$$

Deze geven

$$\frac{B-A}{A+B} = \cos 2\chi \cos 2X, \quad -\frac{C}{A+B} = \cos 2\chi \sin 2X, \dots (25)$$

wanneer men  $\chi$  bepaalt door

$$\frac{b}{a} = \text{Tg } \chi \text{ en } 0 < \chi < 90^\circ; \dots \dots \dots (26)$$

deze hoek, wiens tangens de verhouding van de kleine as tot de groote in de ellips op het tijdstip  $t$  bepaalt, zullen wij den verhoudingshoek noemen.

De vergelijkingen, die vorm en ligging van de baan bij  $t$  bepalen, zijn dus

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\chi \cos 2X &= \cos \psi \cos \epsilon' + \sin \psi \sin \epsilon' \cos 2(D + \delta), \\ \cos 2\chi \sin 2X &= \sin \epsilon' \sin 2(D + \delta). \end{aligned} \right\} (27)$$

De zin van de beweging in de oogenblikkelijke baan is overeenkomstig fig. (1) Pl. I in den zin van de  $x_i$ -as naar de  $y_i$ -as positief of nega-

tief al naarmate het teeken van  $\frac{d}{dt} \left( \frac{y_i}{x_i} \right)$ , of w. h. i. van  $x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}$  positief of negatief is.

Nu is volgens (19)

$$x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} = \lambda \mu' - \lambda' \mu,$$

en volgens (18)

$$\lambda \mu' - \lambda' \mu = a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cos 2(D + \delta) =$$

eindelijk volgens (14) en (22)

$$\begin{aligned} \lambda \mu' - \lambda' \mu &= a_1^2 \left\{ -Tg \frac{1}{2} \psi (1 - Tg^2 \frac{1}{2} \varepsilon) + (1 - Tg^2 \frac{1}{2} \psi) Tg \frac{1}{2} \varepsilon' \cos 2(D + \delta) \right\} = \\ &= \frac{-\cos \varepsilon' \sin \psi + \sin \varepsilon' \cos \psi \cos 2(D + \delta)}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \psi \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon'} a_1^2. \end{aligned}$$

De zin van de beweging in de baan, dien wij korthedshalve het teeken van de baan zullen noemen, in den zin van de  $y_i$ -as naar de  $x_i$ -as positief genomen, aanduidende door  $[+]$ ' of  $[-]$ ' , of, beide gevallen samenvattende, door  $[\pm]$ ' , wordt bepaald door de vergelijking

$$A = \cos \varepsilon' \sin \psi - \cos \psi \sin \varepsilon' \cos 2(D + \delta) = [\pm]' \sqrt{A^2}. \quad (28)$$

De vergelijkingen (27) en (28) stellen de vormverandering van de baan van het punt in 't verloop van tijd voor. Zij zijn identisch met (120) en (121) van 't 1<sup>e</sup> Stuk, en hunne discussie is in het 1<sup>e</sup> Stuk reeds in den eenvoudigsten vorm gebracht. Wij kunnen dus verder volstaan met te verwijzen naar n<sup>o</sup>. 19, 20 en n<sup>o</sup>. 22 tot n<sup>o</sup>. 31 van het 1<sup>e</sup> Stuk, die zich hierbij terstond aansluiten.

## § 2. De bewegingsverschijnselen van onzen slinger teruggebracht tot die van de vorige §.

Laat men het in de vorige § beschouwde vlak, waarin het bewegende punt blijven moet, in willekeurige richting maar evenwijdig aan zich zelf en met standvastige snelheid verschuiven, zoo blijven daarbij de versnellingen van het punt ten opzichte van de bewegende coördinatenassen onveranderd. Neemt men vervolgens in plaats van de eenparige verschuiving eene veranderlijke, zoo kan men bij het nagaan van de betrekkelijke beweging van het punt ten opzichte van de bewegende coördinatenassen van die verandering afzien, mits men aan het punt de tegengestelde ontbondene van de versnelling, die

in het vlak zelve valt, medegedeeld denkt. Deze versnelling kan men toeschrijven aan eene denkbeeldige nevenkracht, die dus onafhankelijk van de plaats en de snelheid van het punt in het vlak is. En wanneer men zich eindelijk voorstelt, dat het vlak tevens draait om eene as gaande door den oorsprong en liggende in het vlak zelf, zoo zal men ook van deze beweging af mogen zien, wanneer men nog eene versnelling — die der centrifugaalkracht om deze as — aan het punt medegedeeld denkt, welke alleen afhangt van den afstand van het punt tot deze as. Zoo zijn wij opgeklommen tot de meest algemeene mogelijke beweging van het vlak, en zien wij, dat de betrekkelijke beweging van ons punt ten opzichte van de coördinatenassen in het vlak behalve door de versnellingen

$$+ 2\gamma \frac{dy_i}{dt}, \text{ die men volgens (7) van § 1 bij } X_i,$$

en  $- 2\gamma \frac{dx_i}{dt}$ , die men bij  $F_i$

voegen moet, en die van eene zeer kleine draaiingssnelheid van het vlak om zijne normaal afkomstig zijn, uitsluitend bepaald wordt door krachten of versnellingen, die van den betrekkelijken bewegingstoestand van het punt onafhankelijk zijn.

Een voorbeeld van zulk eene beweging van een vlak is die van het horizontale vlak, dat men door het zwaartepunt van een aan het aardoppervlak cardanisch opgehangen slinger leggen kan, wanneer deze zich in rust bevindt; dan is  $\gamma$  de ontbondene van de draaiingssnelheid der aarde volgens de verticaal van het ophangpunt. Bij oneindig kleine bewegingen van den slinger verwijderd het zwaartepunt zich slechts ten bedrage van eene oneindig kleine grootheid van de tweede orde uit dit vlak; en kan men dus zonder merkbare fout zeggen, dat het zwaartepunt bij zijne verplaatsing in dit vlak blijft. Wij nemen verder aan, dat de messen in den evenwichtsstand horizontaal zijn, dat zij samenvallen met de assen van de in 't algemeen verschillende hoofdtraagheidsmomenten van den slinger voor het ophangpunt en beschouwen hunne projectiën op het genoemde vlak als  $x_i, y_i$ -assen, zoodat de evenwichtsstand van het zwaartepunt in den oorsprong van het  $x_i, y_i$ -stelsel ligt. — Let men dan alleen op de krachten, die van de ligging van het zwaartepunt afhangen (de zwaartekracht), zoo zou het ten opzichte van deze assen volgens de vergelijkingen (2) bewegen. Neemt men echter ook de krachten ten gevolge van de draaiing van het vlak met de aarde om de verticaal in aanmerking, en beschouwt men daarbij in eerste benadering den

slinger als een enkelvoudige, waarvan de massa geheel in het zwaartepunt samengetrokken is, zoo ziet men, dat de beweging van het zwaartepunt door de vergelijkingen (7) bepaald wordt.

Eene meer nauwkeurige beschouwing van den invloed van vorm en inrichting van den gebruikten slinger is in het tweede Stuk van het wiskundig gedeelte bevat. Er blijkt voornamelijk uit, dat de richting der  $x_i$ ,  $y_i$ -assen op welke de vergelijking (7) betrekking heeft in 't algemeen niet die der messen is, maar hiermede een hoek  $\psi$ , maakt, wiens waarde daar evenals  $p - q$  berekend (zie de uitkomst op pag. 153 en 2<sup>e</sup> Stuk IV [2]) maar hier proefondervindelijk bepaald wordt; verder, dat in de verschijnselen ten opzichte van deze assen  $x_i$ ,  $y_i$  uit (7) volgende voor  $\gamma$  niet de ontbondene van de draaiingssnelheid der aarde volgens de verticaal van het ophangpunt, ( $\tilde{\omega}_{z_0}$  in het 2<sup>e</sup> Stuk,  $\gamma_w$  in het 1<sup>e</sup> Stuk), maar de weinig daarvan afwijkende

$$\gamma = \frac{2P - R}{2P} \tilde{\omega}_{z_0} = \frac{2P - R}{2P} \gamma_w$$

genomen moet worden, waar  $P$  het traagheidsmoment van den slinger om een der messen en  $R$  het traagheidsmoment om de verbindingslijn van zwaartepunt en ophangpunt is.

Wij kunnen volstaan met verder wat betreft het gebruik, dat men van deze verschijnselen maken kan om de aswenteling der aarde te bewijzen, te verwijzen op n<sup>o</sup>. 38 — n<sup>o</sup>. 42 van het 1<sup>e</sup> Stuk, die hierbij onmiddellijk aansluiten.

Wij willen hier echter nog aan n<sup>o</sup>. 16, 33, 35 en 38 van het 1<sup>e</sup> Stuk de gevolgtrekking ontleenen, dat een samengestelde slinger, hetzij vrij om een punt bewegelijk of cardanisch aan een messenpaar opgehangen, wanneer hij niet nagenoeg een omwentelingslichaam om de verbindingslijn van zwaartepunt en ophangpunt is en er dus tusschen de traagheidsmomenten om assen loodrecht op deze verbindingslijn een eindig verschil bestaat, dezelfde figuren van LISSAJOUS (voor andere verhoudingen dan 1:1) beschrijft als wanneer de aarde in rust was, en dus (in de richting van hunne symmetrieassen) in vlakke slingeringen kan worden gebracht, zonder dat het slingervlak met de aarde meedraait, of de slingeringen merkbaar van vlakke slingeringen gaan verschillen.

## HOOFDSTUK II.

## BESCHRIJVING VAN DEN TOESTEL.

§ 1. *De slinger.*

Pl. II en III stellen de gekozen inrichting van den toestel voor. De slinger is (Pl. III, fig. I) aan een messenpaar in eene kast, *k*, opgehangen, die uit een kegelmantel van aan elkaar geklonken en gesoldeerde stortplaten bestaat en met de as verticaal onwrikbaar op een vasten grondslag geplaatst (of aan een muur vrij van trillingen, bevestigd) wordt. Den boven- en benedenrand van den mantel vormen daaraan gesoldeerde en vlak afgeslepen koperen ringen *r*, *r'*. Op den bovenste kan men eene glazen klok met geslepen rand plaatsen en tegen den benedenste eene, eveneens vlak geslepen, koperen plaat aanklemmen. Twee zijdelingsche openingen of venstertjes, *o*, die voor de waarneming van de bewegingen van den slinger in de kast vereischt worden, kunnen op dergelijke wijze met spiegelglas platen gesloten worden. Wenscht men boven den slinger eene luchtledige ruimte van grooteren diameter dan die van den bovensten kraag van de kast te houden, zoo maakt men gebruik van een stevigen ijzeren ring, *e*, die met een geslepen rand op den kraag past en om beter weerstand aan de luchtdrukking te kunnen bieden, naar beneden iets gewelfd is; op den vlak geslepen buitensten rand, *a*, daarvan kan dan een grootere glazen klok worden geplaatst. Is de kast op de beschreven wijze gesloten, zoo kan men haar door de kraan *i* met de luchtpomp verbinden en luchtledig maken. Eerst willen wij echter den toestel zonder klok en platen — dus ongesloten — beschouwen en de wijze van ophangen van den slinger beschrijven, waarbij vooral naar eene zoo groot mogelijke overeenstemming met de grondslagen der berekeningen gestreefd werd. In eene uitdieping *b* (zie fig. I van Pl. III), die langs de geheele binnenzijde van den bovensten kraag van de kast loopt, legt men eene daarin passende stevige cirkelvormige plaat, *c*, op welke het eerste mes, *s*, met schroeven zoo bevestigd is, dat de scherpe kant naar boven gekeerd en met het bovenvlak van de plaat evenwijdig is. Terwijl eene zijdelingsche verplaatsing van de plaat onmogelijk is, kan men door haar in haar eigen vlak te draaien het mes in een willekeurig azimuth stellen.

Mocht, nadat het mes in het gekozen azimuth gebracht is, de plaat niet zuiver horizontaal zijn, zoo kan men dit verhelpen met de schroefjes  $f$ . Op dit mes legt men den drager van den slinger,  $t$ , die uit twee dikke, op elkaar vlak geslepen en aan elkaar geschroefde platen bestaat. Uit elk van beiden is in de richting van een diameter en aan beide zijden van den omtrek af tot dicht aan het middelpunt toe een streep weggenomen; wanneer de platen zoo op elkaar geschroefd zijn, dat de spleten loodrecht op elkaar staan, vertoont elke zijde dus uitdiepingen,  $g_1$  en  $g_2$ , wier bodem door de andere plaat gevormd wordt. Laten wij een oogenblik aannemen, dat de twee spleten in eene plaat in elkaar liepen en dus ook het stuk, dat in het midden van die plaat is overgebleven, weggenomen was. Men kan zich dan voorstellen, dat de drager met den bodem van de naar beneden gekeerde spleet op het mes rust en om de scherpe kant er van slingert zonder, zoolang de amplitude zijner slingeringen eene zekere grootte niet overschrijdt, tegen het mes aan te stooten. In werkelijkheid loopen de samenhoorende spleten niet in elkaar. In het midden van elke plaat is om den drager een vasteren samenhang te geven een stuk,  $h$ , blijven staan en overeenkomstig hiermede moest, om die beweging mogelijk te maken, uit het midden van het mes een stuk worden weggeviold. Men kan die beweging verhinderen door de schroefjes,  $l$ , uit de vaste plaat op te schroeven; want dan worden de met zeemleer bekleede veeren,  $m$ , tegen den drager gedrukt. Stellen wij deze voorloopig zoo, dat de drager in zijne beweging verhinderd wordt, maar toch nog op het mes rust en wel zoo, dat de bodem van de naar boven gekeerde spleet  $g_2$  nagenoeg horizontaal is. Hierop plaatst men, loodrecht op het eerste mes, het tweede,  $s_2$ , dat met de slingerstang,  $n$ , zooals wij zullen zien, onwrikbaar verbonden is, en hieraan den slingerbol,  $q$ , draagt. De scherpe kant van dit mes moet loodrecht op de slingerstang zijn en het midden in de meetkundige as daarvan vallen. Zooals uit het eerste is ook uit dit mes zooveel weggeviold, dat het met de scherpe kant op den bodem van de naar boven gekeerde spleten,  $g_1$ , in den drager geplaatst kan worden en dat dan niet al te groote bewegingen van den slinger om die scherpe kant als as mogelijk zijn. Beschouwen wij den eigentlichen slinger en zijne verbinding met het bovenste mes nog eenigzins nauwkeuriger. In een looden bol,  $q$ , van 15 kilo is in de richting van een diameter een doorboring gemaakt, waarvan de wijidte aan beide zijden van het middelpunt verschilt. De bol wordt met wrijving op eene stevige koperen buis

geschoven en rust nagenoeg ter hoogte van zijn middelpunt op eene verdikking,  $u$ , van het benedeneinde van deze slingerstang. Het bovineinde van den laatste draagt eerst eene dwarschijf,  $v$ , loodrecht op zijne richting. Vier staafjes,  $p$ , die uit den rand daarvan evenwijdig met de slingerstang opstijgen, kan men van onderen op door de openingen,  $w$ , in de vaste plaat steken en daarna met hunne bovineinden in de daartoe bestemde openingen van eene tweede cirkelvormige schijf,  $z$ , bevestigen, die aan de onderkant op het tweede, met de scherpe kant naar beneden gerichte, mes steunt.

Plaatst men dit mes op den bodem van de naar boven gekeerde gleuven in den drager zoo is de slinger opgehangen. In de cirkelvormige plaat,  $z$ , zijn naast het tweede mes weer schroefjes,  $l_2$ , en veeren,  $m_2$ , aangebracht, die, tegen den drager gedrukt, de beweging van den slinger om het tweede mes verhinderen.

Heeft men ze echter opgeschroefd en dus buiten werking gesteld, zoo kan de slinger om het tweede mes,  $s_2$ , als as draaien; zijn ook de benedenste remschroefjes buiten werking gesteld, zoo kan de drager met het eigenlijke slingerlichaam buitendien nog om het eerste mes als as slingeren. Wanneer men nu aan deze beide bewegingen verschillende amplituden en fasen geeft, kan men elke willekeurige elliptische of cirkelvormige slingering uit beide samenstellen.

Heeft men den slinger in vrijheid aan zich zelf overgelaten, zoo kan men gemakkelijk zien of de middelpunten van den boven en benedenring van de kast in dezelfde verticale lijn liggen, door onder aan den slinger een oogeblik een schietlood op te hangen. Dat aan die voorwaarde voldaan is, is voor het volgende (§ 2 en § 4) van belang.

De messen en den drager liet ik eerst van glashard staal vervaardigen; later gebruikte ik messen van agaat en een koperen drager waarin agaatpannen zoo bevestigd waren, dat hun oppervlak met dat van elk der platen van den drager nauwkeurig samenviel.

Dat beide draaiingsassen van den slinger in eenzelfde vlak liggen blijkt terstond uit de inrichting van den drager; dit vlak is horizontaal wanneer de benedenste plaat,  $c$ , goed gesteld en het tweede mes, als gezegd is, loodrecht op de slingerstang staat. Om eindelijk de messen gemakkelijk loodrecht op elkaar te stellen, is op den rand van den drager bij elke gleuf een merkteeken gemaakt; bij het stellen van den toestel moet men dan met behulp van eene loupe daarvoor zorgen, dat de einden van de messen juist met deze mer-

ken samenvallen. Om de messen niet door het verschuiven over de pannen te beschadigen moet men den druk van het gewicht van den slinger op de messen opheffen door tegenwichten; daartoe is het het gemakkelijkst eene katrol boven den slinger aan te brengen.

Wanneer men dan na het stellen het azimuth van de slingeren om elk der messen afzonderlijk bepaalt, kan men zien of werkelijk de messen loodrecht op elkaar staan, en zoo noodig den stand nog wijzigen.

## § 2. *Waarneming der slingeren.*

Wij zullen nu beschrijven hoe men de kleine bewegingen van den slinger met eene nauwkeurigheid, die van zijne lengte onafhankelijk is, waarnemen kan. Tot dit doel richt ik den doelmatig vergrootenden kijker (Pl. II en III) van een voor het bovenste venster van de kast geplaatsten kathetometer,  $\beta$ , op het beeld, dat een prisma,  $\gamma$ , binnen de kast door totale reflexie van een paar kruisdraden levert, die met den slinger medebewegen. De kruisdraden zijn op een ring gespannen, en met een gebogen draad zoo onder aan den slinger bevestigd, dat hun vlak nagenoeg horizontaal is en hun kruispunt in de verlenging van de slingerstang valt. Onder den slinger en boven het dradennet is het rechthoekige gelijkbeenige prisma,  $\gamma$ , zoo geplaatst, dat zijn hypothenusa vlak eene helling van  $45^\circ$  met den horizon maakt, en zijn voorvlak loodrecht op de horizontale as van den kijker staat. De kruisdraden worden van onderen scherp verlicht door eene lamp,  $\zeta$ , voor het benedenvenster van de kast en een soortgelijk prisma,  $\theta$ , hetwelk men op dergelijke wijze er onder plaatst. Hun beeld vertoont zich dan in den kijker als zwart kruis op helderen grond. Het waarnemings- en verlichtingsprisma worden met een bijzonder statief op de plaat gesteld, die tot het luchtdicht sluiten van de benedenopening van de kast dient. Men kan de kruisdraden, die door middel van een later te beschrijven scharnier met den slinger verbonden zijn, aanvankelijk zoo stellen, dat het statief met de prisma's wanneer men het van onderen op in de kast brengt, er niet tegen aanstoot; later brengt men ze dan op hunne plaats tusschen de prisma's, waar zij vrij met den slinger heen en weer bewogen kunnen. (Zie Pl. III, fig. 4.)

Wij beschouwen dit statief nog iets nauwkeuriger. Het bestaat uit een zwaren ijzeren ring,  $\kappa$ , waaraan onder een hoek van  $45^\circ$  eene koperen plaat,  $\lambda$ , bevestigd is, die het hypothenusavlak van het

verlichtingsprisma ondersteunt en een weinig daarboven weder met een hoek van  $135^\circ$  omgebogen is. In eene cirkelvormige opening in dit horizontale deel past een ring, waarop het waarnemingsprisma vastgelijmd is. Dit kan dus nog gedraaid worden, maar alleen zoo, dat zijn eene kathetenvlak steeds horizontaal en op dezelfde plaats boven het verlichtingsprisma blijft. Het spiegelbeeld van een verwijderd voorwerp in het voorvlak stelt ons in staat te beoordeelen of dit laatste loodrecht op de as van den kijker staat.

Daar het waarnemingsprisma met het benedenste kathetenvlak op een ring rust zal men in den kijker het heldere veld cirkelvormig begrensd zien. De grootte der prisma's en van den diameter van dezen ring moet men kiezen in overeenstemming met de grootste amplituden, die men aan den slinger wil geven. Heeft men het statief met de prisma's in den stand, dien de vensters vorderen, op de koperen sluitplaat geplaatst, zoo klemt men deze met behulp van ijzerdraden, die aan drie nokken onder aan de kast bevestigd worden, tegen den vooraf met een weinig vet en was bestreken benedenring van de kast. Door de geopende venstertjes kan men met een staafje het geheele statief nog over de plaat verschuiven of wel het waarnemingsprisma draaien en zoo eene fout, die in de stelling der prisma's mocht overgebleven zijn, verhelpen. (Zie Pl. III, fig. 1 en fig. 4.)

Wij kunnen nu de kruisdraden op hunne plaats tusschen de prisma's brengen en beschrijven daartoe eerst nauwkeuriger hoe zij met den slinger verbonden zijn. Onder in de doorboring van den slingerbol is in een kurk,  $\nu$ , het bovenste verticale deel van een gebogen draad bevestigd, waarvan het benedenste deel verticaal langs het statief met de prisma's naar beneden loopt; door draaiing van den draad in de kurk kan dit gedeelte rondom het statief heengevoerd worden zonder bij de te gebruiken amplituden er tegen aan te stooten. Ter hoogte van de vrije ruimte tusschen de prisma's is op dezen draad een stukje kurk,  $\rho$ , geschoven, dat aan een horizontaal dwars staafje,  $\sigma$ , den ring met de kruisdraden draagt; daardoor is eene draaiing van de laatste om den draad als as mogelijk. Voor dat de prisma's op hun plaats gebracht zijn hebben wij het dradennet terzijde gedraaid; wij kunnen nu met een staafje door een van de vensters het weer op zijne plaats brengen. Bij goede stelling van het statief en van de kruisdraden moet dan hun kruispunt liggen onder het middelpunt van den ring, waarop het waarnemingsprisma gelijmd is. Is deze stelling verkregen zoo kan men ook de beide vensters sluiten, de klok boven op de kast plaatsen en deze luchtledig pompen.

Tot het afsluiten gebruikte ik een uit was en olie saamgesmolten, onder roeren afgekoeld en ter dege gekneed homogeen mengsel van was en olie. De verhouding der deelen wordt bepaald door de temperatuur, bij welke men werkt, en door den eisch, dat het mengsel tusschen de vingers zonder moeite gekneed moet kunnen worden. Op elken ring werd een draad van dit mengsel geplakt, de klok of de platen er op gedrukt, en wanneer bij het voortzetten van het pompen het mengsel uit de naden te voorschijn trad, deze zorgvuldig dichtgesmeerd. Ik verkreeg zoo eene voldoende sluiting.

Keeren wij nu terug tot de waarneming van de slingeringen. De kijker is voorzien van een oculairmicrometer,  $\omega$ , die hier dient tot het meten van de assen der slingeringsellips. Heeft men den kijker gericht op de slingerkruisdraden in hun evenwichtsstand, zoo neemt men het oculair  $\tau$  met toebehooren van den kijker af en bevestigt het in eene buis,  $\nu$ , die in de holle as van een graadcirkel met een arm,  $\psi$ , gedraaid worden kan. Een nonius aan den laatste stelt ons in staat de draaiing van het oculair om de as van den graadcirkel daarop af te lezen. Voorloopig willen wij aannemen, dat de assen van het oculair en van den graadcirkel juist met elkaar en tevens met het kruispunt der micrometerdraden samenvallen; dan is de gemeten draaiing die van het oculair om zijne as. (Zie Pl. III, fig. 5 en 6.)

De graadcirkel is aan een statief,  $\chi$ , zoo bevestigd, dat zijne as willekeurig gesteld kan worden en wordt hiermede gewoonlijk bij proeven over de polarisatie van het licht gebruikt. Ik plaatste het oculair in dezen toestel gevat weder met de as in het verlengde van de as van den kijker op zijne plaats achter den kijker, maar nu er van gescheiden. Daar de kruisdraden van het oculair oorspronkelijk ingesteld waren op het beeld van het slingerdradennet in zijn evenwichtsstand, zal dit nu weder het geval zijn, en blijven beide kruispunten samenvallen, hoe men het oculair met den arm ook draait. Wordt dus de slinger in vlakke slingeringen gebracht, zoo beweegt het beeld van het kruispunt der draden in eene rechte lijn, die door het kruispunt der oculairdraden gaat, en men zal het oculair zoo kunnen draaien, dat het eerste bij zijne beweging juist over den vasten draad van den micrometer verschuift. Het azimuth van de slingeringen leest men dan op den graadcirkel af. Zijn de slingeringen elliptisch zoo kan men evenzoo de vaste draad van den micrometer op de groote as instellen. Als beste kenmerk hiervoor dient, dat het waargenomen kruispunt in zijne beweging over den draad dezen loodrecht snijdt en in de richting van den laatste den grootsten uitslag

maakt. De nauwkeurigheid wordt geringer wanneer de excentriciteit der ellipsen afneemt. De methode, die in 't volgende toegepast werd, vordert echter slechts de bepaling van het azimuth van vlakke slingeren. De nauwkeurigheid hiervan hangt wezenlijk af van de duidelijke verlichting van het kruispunt en van den daardoor in 't gezichtsveld doorloopen hoek. De vergrooting van den kijker moet dus zoo gekozen worden, dat bij de grootste amplituden deze hoek juist gelijk aan het gezichtsveld is.

### § 3. *Verandering van traagheidsmoment en wrijving.*

Twee deelen van het slingerlichaam moeten nog beschreven worden. De methode, die in beginsel is aangegeven, vereischt voor hare toepassing de verandering van de traagheidsmomenten van den slinger. Daartoe draagt deze boven het messenpaar een cirkelvormig tafeltje *A* (Pl. III, fig. 1), waarop men gewichten *B* plaats kan. Buitendien kan men aan den rand er van een plaatje *D* bevestigen, met behulp van een loodrecht op het vlak er van gesoldeerden draad *C* en een klemmetje. Het plaatje moet dan in den evenwichtstand van den slinger, in het horizontale vlak der scherpe kanten van de messen vallen en kan in een glaasje met olie, *I*, gedompeld worden, dat men naast de messen onder de klok, *G*, plaatst. Is de slinger in beweging gebracht, zoo slingert dit plaatje mee. Het draait daarbij om eene as, die evenwijdig aan de momentaan van de beweging van den slinger is en door het middelpunt van het plaatje gaat. Buitendien heeft het eene slingerende translatiebeweging loodrecht op zijn vlak, wier amplitude bepaald wordt door amplitude, vorm en ligging van de slingerellips. Men kan den weerstand van de vloeistof tegen de beweging van het plaatje ontbinden in de demping van de draaiings- en van de translatiebeweging. Beide zijn nagenoeg evenredig met de snelheid der gedempte beweging. Voor het verschil van de demping in verschillende richtingen, is de rotatiebeweging van het weerstandsplaatje van geen invloed, zij heeft slechts dezelfde, overigens zeer kleine, toename van het decrement voor trillingen in elke richting ten gevolge. Anders is het met de translatiebeweging gesteld. Want wanneer men de bewegingen van den slinger in twee enkelvoudige en loodrecht op elkaar staande slingeren ontbindt, waarvan de eene aan het weerstandsplaatje geen translatiebeweging mededeelt; zoo is de amplitude der translatieslingeren van het weerstandsplaatje evenredig aan de amplitude, welke

men alsdan aan de andere van die beide trillingen toe moet schrijven. Dus wordt het decrement voor slingeringen in de richting van de laatste om eene grootheid vermeerderd, die rechtevenredig is met het oppervlak van het plaatje en met den afstand van het middelpunt daarvan tot het ophangpunt van den slinger.

En wanneer men in een gegeven richting het decrement om eene bepaalde grootheid wil vermeerderen, zal men in die richting het middelpunt van het plaatje aan den rand van het tafeltje moeten bevestigen en kan men het oppervlak berekenen, hetwelk men aan het plaatje moet geven.

#### § 4. *Het in beweging brengen van den slinger.*

Om den slinger, ook wanneer de kast gesloten en luchtledig gepompt is, in slingeringen van willekeurige amplitude en azimuth of wel in rust te brengen, is aan de binnenzijde van de sluitplaat, die men onder tegen de kast aanklemt, een hefboomtoestel aangebracht, die men van buiten af bewegen kan.

Om de inrichting daarvan te beschrijven willen wij het statief met de prisma's, dat op de sluitplaat staat, een oogenblik wegdenken (Pl. III, fig. 7). Het is er om te doen, den slinger, die op eenigen afstand boven de sluitplaat hangt, in een willekeurig vlak in slingering te brengen zonder dat de lucht in de kast treden kan. Daartoe neemt eene naar beneden wijder wordende conische doorboring in het middelpunt van de sluitplaat eene ingeslepen holle as,  $a$ , op, die met een weinig vet luchtdicht er in sluit en aan het benedeneinde eveneens, zooals later beschreven zal worden, luchtdicht gesloten is. Zij draagt zijdelings aan haar einde, dat in de kast uitkomt, de horizontale draaiingsas,  $\alpha$ , van een hefboom,  $h$ . Wanneer deze rust op het vlakke einde van de holle as, kan men den slinger binnen de gewenschte grenzen elke willekeurige slingering laten uitvoeren zonder dat hij tegen het naar boven gebogen einde van dezen hefboom aanstoot. Maar wanneer men uit de opening van de holle as,  $a$ , een staafje te voorschijn drukt, wordt hij opgeheven, het omgebogen einde nadert als een vinger den slingerbol ter hoogte van diens middelpunt en raakt dien aan zoodra men den hefboom verder opheft. Drukt men nu het staafje nog verder uit de opening te voorschijn zoo wordt de slinger ter zijde gedrukt en heeft zijne afwijking plaats in het vlak van de beweging van den hefboom. Laat men dan het staafje,  $s$ , plotseling door de opening

$a$  terugtrekken, zoo valt de hefboom door zijn eigen gewicht en de bevrijde slinger komt in vlakke slingeringen. Men kan deze slingeringen in elk willekeurig vlak laten plaats vinden, wanneer men slechts voor dat het staafje  $s$  uit de opening te voorschijn gedrukt wordt, het vlak van de beweging van den hefboom in het gekozen azimuth stelt. Tot dit doel kan men met behulp van een arm,  $b$ , de holle as  $a$  om hare meetkundige as in de conische opening draaien.

Wij gaan nu na, hoe men de slingeringen van den slinger in het gekozen vlak eene willekeurige amplitude kan geven, of wat hetzelfde is hoe men het staafje  $s$ , willekeurig uit de opening van de holle as te voorschijn treden en plotseling terug vallen laten kan, zonder dat de lucht toetreedt.

De doorboring van de holle as,  $a$ , is beneden cilindrisch, zij eindigt echter naar boven in eene rechthoekige nauwe opening; overeenkomstig daarmede is ook het bovineinde van het staafje van rechthoekige doorsnede; maar het benedeneinde is cilindrisch, zoodat het in de cilindrische holte van  $a$  past. Verder naar beneden is van dit cilindrische deel zooveel weggenomen, dat de dwarsche doorsnede slechts een segment,  $\beta$ , van de doorsnede van de doorboring van  $a$  blijft. Dit segment heeft ten opzichte van  $a$  een vaste ligging, omdat het bovineinde van het staafje in de rechthoekige opening in  $a$  past. Een veertje  $f$ , trekt het staafje door de opening terug, zoodra het niet van onderen op er door gedrukt wordt, daarentegen verhindert een klein stiftje,  $m$ , dat het verder valt, dan dat het bovineinde juist binnen de opening van  $a$  terugtreedt. Om het cilindrisch deel in  $a$  op te schuiven en weer los te kunnen laten eindigt de cilindrische doorboring van de holle as,  $a$ , weder in eene naar beneden zich verwijdende conische, waarin een tweede, beneden luchtdicht gesloten holle as,  $a_1$ , juist zoo past, als de eerste,  $a$ , in de conische opening van de sluitplaat. De doorboring van deze as eindigt naar boven weder in eene nauwere van rechthoekige doorsnede. Door deze kan men een staafje opschroeven, dat bij elken stand van de rechthoekige opening  $o_1$  ten opzichte van de holle as  $a$  vrij voorbij het onderste (cilindersegment) deel van het staafje  $s$ , zou kunnen bewegen, wanneer niet het bovineinde er van naar eene zijde verbreed ( $\gamma$ ) was, zoodat het daar den wand van de holle as  $a$  bereikt. Is dit laatste staafje,  $g$ , geheel naar beneden geschroefd, zoo kan men met behulp van den arm  $d$  de holle as  $a_1$  in de conische opening willekeurig draaien. Wij willen nu aan-

nemen, dat men haar zoo gesteld heeft, dat de verbreeding van het staafje tegen dezelfde zijde van den wand aanlegt, als het van den cylinder  $s$  gespaarde segment,  $\beta$ . Beweegt men dan  $g$  naar boven, zoo stoot de verbreeding tegen dit deel,  $s$  beweegt in de hoogte en het einde van den hefboom zal den slingerbol ter zijde drukken. Heeft men nu de verlangde afwijking bereikt en draait men zonder de ligging van  $g$  ten opzichte van  $b$  te wijzigen de holle as om hare meetkundige as zoo beweegt de verbreeding van  $g$  onder den segmentcylinder van  $s$ , (die dezelfde ligging behoudt) weg en zoo-dra dit het geval is trekt het veertje  $f$  het staafje  $s$  terug en valt de hefboom. Gedurende de draaiing van de holle as  $o_1$  om hare meetkundige as, dus terwijl de verbreeding van  $g$  onder  $s$  wegbeveegt, mag de stand van  $s$  zelf niet veranderen en het benedenvlak van  $s$  en het bovenvlak van  $g$  moeten dus beide loodrecht op de meetkundige as van  $a$  staan. Nu moeten wij nog aangeven hoe men  $g$  willekeurig op en neerbewegen kan zonder dat daarbij lucht in den toestel komen kan. De doorboring van de holle as  $a_2$ , die naar boven in eene nauwere van rechthoekige doorsnede overgaat, is naar beneden weder conisch verwijd en daarin past als in de beide vorige gevallen weder eene derde ingeslepen as,  $a_3$ , waarvan de geometrische as met die van  $a_1$  en  $a_2$  samenvalt. De doorboring van deze laatste vormt eene beneden gesloten lange schroefmoer,  $m$ , in de richting van hare meetkundige as, waarin de schroef, die het benedeneinde van  $g$  vormt past. Wanneer men dus deze moer in de eene of andere richting met behulp van den schroefkop  $k$ , in de conische opening om hare as draait, beweegt de schroef overeenkomstig op en neer, daar haar einde in de rechthoekige opening  $o_2$  gevat is en zij dus niet om hare as kan draaien.

De conische assen worden alle met zachten druk in de conische openingen bevestigd, met behulp van ringetjes en schroefjes,  $v$ , die tevens voorkomen, dat de toestel uit elkaar valt. De sluiting was volkomen bevredigend, zonder dat de beweging van de schroefmoer en van de armen  $b$  en  $d$  de minste moeite kostte; dit moet in 't bijzonder bij den arm  $d$  het geval zijn, want anders konden bij het loslaten van den slinger schuddingen in den toestel worden opgewekt en zou men er dus niet zeker van zijn, dat de slingeringen aanvankelijk volkomen vlak worden.

De stand van den arm  $b$  en het aantal omdraaiingen van den schroefkop  $k$  stellen ons in staat den slinger nagenoeg eene bepaalde gewenschte afwijking te geven; men ziet dan in den kijker of het

doel bereikt is en wijzigt den stand van beiden zoolang tot dit het geval is. Daarbij moet men steeds eerst het vlak van de hefboom-beweging zuiver stellen, en voor men dit verandert steeds weer den slinger in rust brengen en dan den hefboom verder vallen laten. Anders stelt men zich aan het gevaar bloot door wrijving van den hefboom over den slingerbol de messen over hun pannen te verschuiven en daardoor zoowel deze te beschadigen als hun hoek te wijzigen.

Tot nu toe hebben wij afgezien van het statief met de prisma's. De afmetingen hiervan zijn echter zoo gekozen en de hefboom zoo gebogen, dat men aan den slinger in elk azimuth van  $0^\circ$  tot iets over  $180^\circ$  de gewenschte afwijking kan geven zonder tegen de eerste aan te stooten. En dit is voldoende omdat afwijkingen in 't azimuth  $\alpha$  zoowel als in 't azimuth  $\alpha + 180^\circ$  slingeringen in hetzelfde vlak tengevolge hebben.

#### § 5. *Inrichting en berekening der proeven.*

[1] Wij zullen nu beschrijven, hoe men den slinger bewegingsverschijnselen van eene bepaalde klasse kan laten vertoonen. Daartoe komt het er in de eerste plaats op aan voor den slinger de waarden  $\psi_D$  en  $\psi'$  te kennen.

Wij beginnen er dus mede, den slinger om het vaste mes alleen te laten slingeren; en bepalen op den graadcirkel van het oculair de aflezing  $M$ , die daarmede overeenkomt, dat de vaste draad van den oculairmicrometer op deze slingering ingesteld is, of m. a. w. het beeld van de slingerende kruisdraden in het gezichtsveld van den kijker bij zijne beweging juist over dezen draad heen en weerglijdt. Herinneren wij ons (§ 2 van dit Hoofdst.) verder, dat wij in den kijker het beeld der kruisdraden in een boven hen geplaatsten spiegel waarnemen, en dus de beweging van de groote as der slingeringsellipsen van rechts naar links op dezelfde wijze zien als iemand, die met het hoofd omlaag en met de voeten naar boven uit de naar beneden gerichte verticaal (de  $z_0$ -as van 't 2<sup>e</sup> Stuk) naar hun kruispunt ziet. Dan blijkt: dat men van de aflezingen  $M + 90^\circ$  of  $M - 90^\circ$  diegene als oorsprong van de telling van  $\psi_D$  moet nemen, welke in de projectie van de (in 't 2<sup>e</sup> Stuk als  $+x$ -as gekozen) verlenging van het vaste mes valt, wanneer men zich voorstelt, dat de kijker met oculair en graadcirkel zonder om zijn optische as te draaien met deze verschoven, beneden de kruisdraden in de  $z_0$ -as van 't 2<sup>e</sup>

Stuk gebracht en op de kruisdraden gericht wordt. Is de verdeling van den graadcirkel naar den waarnemer, als hij in den kijker ziet, toegekeerd, dan moet men van uit het zoo bepaalde nulpunt de hoeken in de richting tegengesteld aan de beweging van den uurwijzer positief tellen. Verder moet men aan eene slingeringsellips het positieve teeken toekennen, wanneer men het beeld der kruisdraden in den kijker zijne baan in den zin van den uurwijzer ziet doorloopen.

Men geve nu aan de bewegingen van den slinger om beide messen weer volkomen vrijheid en brenge hem met behulp van de in § 4 beschreven inrichting in een willekeurig azimuth  $A$  (van uit het gevonden nulpunt geteld) in vlakke slingeringen. In 't algemeen zullen deze spoedig elliptisch worden. De aanvankelijke toename van het azimuth van hunne groote as (zie n<sup>o</sup>. 23 van 't 1<sup>e</sup> Stuk) heeft het tegengestelde teeken van  $\gamma$  en bepaalt daardoor dat van deze laatste grootheid. Na een zekeren tijd (van 5' tot 10') bepaalt men de verhouding van de kleine tot de groote as  $Tg \chi_A$  en het teeken  $[\pm]_A^r$  van de ellips (zie § 3); brengt den slinger tot rust en herhaalt dezelfde bepalingen tot oorspronkelijk azimuth  $A + 45^\circ$  kiezende, die nu  $Tg \chi_{A+45^\circ}$  en  $[\pm]_{A+45^\circ}^r$  leveren. Mocht in beide gevallen het teeken der ellipsen het zelfde worden, dan herhale men nog eens dezelfde bepalingen met  $A - 45^\circ$  als oorspronkelijk azimuth en laat dan in de berekening  $Tg \chi_{A-45^\circ}$  en  $[\pm]_{A-45^\circ}^r$  in de plaats van  $Tg \chi_{A+45^\circ}$  en  $[\pm]_{A+45^\circ}^r$  treden.

Uit (136) van 't 1<sup>e</sup> Stuk volgt, dat bij oorspronkelijk rechte slingeringen met het azimuth  $X_0$ , die in ellipsen overgaan, en waarvoor dus  $\frac{d\chi}{dt}$  positief is, en bij gegeven waarden van  $\gamma$ ,  $\psi'$  en  $\frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos^2 \psi}}$ ,

het teeken  $[+]^r$  of  $[-]^r$  van de ontstaande ellipsen alleen van dat van  $\sin 2 X_0$  afhangt. Dit teeken verandert dus niet zoolang men  $X_0$  in hetzelfde quadrant tusschen de symmetrieassen kiest, maar wel zoodra men met  $X_0$  in een ander quadrant overgaat. Bij onzen slinger moet  $X_0$ , als azimuth van de oorspronkelijke slingering ten opzichte van de symmetrieas der  $x_i$ , gelijk  $A - \psi_D$  gesteld worden. Daar  $X$  en  $\chi$  in den korten tijd,  $t$ , die telkens na het loslaten,  $\chi = 0$ , verloopt, voordat men  $\chi$  bepaalt, slechts weinig veranderen; zal men

$\chi = \left(\frac{d\chi}{dt}\right)_0 t$  kunnen stellen en dus uit de bepalingen bij  $A$ ,  $\chi_A$ , en diegene van  $A + 45^\circ$  of  $A - 45^\circ$ ,  $\chi_{A+45^\circ}$ , waarbij de ellipsen te

gengesteld teeken krijgen als bij  $A$ ,  $\psi_D$  kunnen berekenen; volgens (136) van 't 1<sup>e</sup> Stuk is namelijk

$$\chi_A : \chi_{A \pm 45^\circ} = \left( \frac{d\chi}{dt} \right)_A : \left( \frac{d\chi}{dt} \right)_{A \pm 45^\circ} = \mp \text{Tg } 2(A - \psi_D) : 1,$$

omdat 
$$- \left( \frac{d\chi}{dt} \right)_A = [\pm]^r \gamma \text{Sin } 2X \text{ Cotg } \psi,$$

$$- \left( \frac{d\chi}{dt} \right)_{A \pm 45^\circ} = [\pm]^r \gamma \text{Sin}(2X \pm 90^\circ) \text{ Cotg } \psi$$

en  $[\pm]^r$  in 't tweede geval het tegengestelde teeken van 't eerste geval voorstelt.

Wij vinden dus zoo in elk der beide gevallen voor  $\psi_D$  vier benaderde waarden  $B$ , wier onderling verschil  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  en  $270^\circ$  bedraagt, maar die, omdat  $B$  en  $B + 180^\circ$  het azimuth van dezelfde lijn bepalen, neerkomen op twee waarden, die onderling  $90^\circ$  verschillen en beide, afgezien van het teeken kleiner dan  $90^\circ$  zijn. Evenzoo levert de formule (27) en (27\*) van 't 2<sup>e</sup> Stuk twee waarden van  $\psi_D$ , die afgezien van het teeken kleiner dan  $90^\circ$  zijn en overeenkomen met de groote en met de kleine as van de ellips ( $e$ ) (pg. 150); de keuze tusschen deze twee hebben wij toen daardoor bepaald, dat  $\psi_D$  van uit de projectie van het vaste mes ( $+x'$  zijde) naar de naastbij gelegen as van de ellips ( $e$ ) genomen moet worden, en wij moeten dus die waarde van  $B$  als  $\psi_D$  nemen, welke afgezien van het teeken de kleinste is.

Terwijl de eigenschap der symmetrieassen, van de grens aan te geven tusschen het ontstaan van slingeringen met positief en negatief teeken uit oorspronkelijk rechtlignige, ons eene eerste benadering tot de waarde van  $\psi_D$  leverde, willen wij nu voor eene tweede benadering gebruik maken van de eigenschap, dat zij den hoek tusschen de vlakke slingeringen bij het begin en bij het einde van eene onderperiode middendoordeelen en de waarneming van deze onderperiode tevens doen dienen, om bij benadering  $\psi'$  en  $\Pi$  te leeren kennen. Wij kiezen die onderperiode zoo, dat zij de kleinste helft van de geheele periode moet zijn. Dit is zeker het geval wanneer wij den slinger loslaten in het azimuth

$$C = \psi_D + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2}} 10^\circ, \quad \left( \text{of } \psi_D + 90^\circ + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2}} 10^\circ \right),$$

daar alsdan de groote as van de slingeringsellips aanvankelijk naar de naastbijgelegen symmetrieas  $\psi_D$  (respective  $\psi_D + 90^\circ$ ) toe beweegt.

Wij bepalen het azimuth der vlakke slingeringen aan het begin en bij het einde van deze onderperiode, het gemiddelde van beiden is eene tweede benadering voor  $\psi_D$  (respective  $\psi_D + 90^\circ$ ); het verschil van beide geeft de waarde en  $C - \psi_D$  het teeken van  $2X_0$  behoorende bij de aanvankelijke slinging. Het teeken van de ellipsen die in deze onderperiode optreden is dat van  $\text{Cos} \psi$  (respective tegengesteld aan dat van  $\text{Cos} \psi$ ) en uit de maximumwaarde, welke de verhouding van de kleine tot de groote as in haar verloop, en wel bij het samenvallen met de  $\psi_D$  (respective  $\psi_D + 90^\circ$ ) as, bereikt, kunnen wij  $\psi'$  berekenen.

[2] Deze berekening heeft voor dit doel een groot voordeel boven de in n°. 38 van 't 1<sup>e</sup> Stuk aangegeven methoden ter bepaling van  $\psi'$ , omdat wij anders de geheele tweede onderperiode ook nog zouden moeten volgen.

Uit (132) van 't 1<sup>e</sup> Stuk volgt bij zwevingen om de  $x$ , -as

$$\text{Cos} \varepsilon = \text{Cos} \pm (\varepsilon - 2\chi_m) \text{Cos} 2X_0,$$

wanneer  $\chi_m$  de maximumwaarde van  $\chi$  gedurende de beschouwde onderperiode is, terwijl + voor de normale - voor de abnormale onderperiode geldt. Hieruit volgt

$$\frac{1 - \text{Cos} 2X_0 \text{Cos} 2\chi_m}{\text{Sin} 2\chi_m \text{Cos} 2X_0} = \text{Tg} \varepsilon,$$

en  $\varepsilon$  kennende, vindt men  $\psi' > 0$  uit

$$\psi' = \pm (\varepsilon - 2\chi_m).$$

Bij zwevingen om de  $y$ , -as heeft men daarentegen op de zelfde wijze

$$\frac{1 + \text{Cos} 2X_0 \text{Cos} 2\chi_m}{\text{Sin} 2\chi_m \text{Cos} 2X_0} = \text{Tg} \varepsilon,$$

en

$$\psi' = \pm (180^\circ - \varepsilon - 2\chi_m).$$

Behooren eindelijk de verschijnselen tot de klasse B. I zoo moet men hierin als normale onderperiode, *die* verstaan, waarin de coördinatenas het naast bij de slingeringsrichting, onder abnormale, *die*, waarbij de verst verwijderde coördinatenas overschreden wordt.

Voor dat wij tot deze berekening overgaan vatten wij de waarneming, die op de vorige bladzijden tusschen ( ) gevolgd werd, met de eerste tot een gemiddelde samen; daardoor worden volgens het 2<sup>e</sup> Stuk (Hoofdst. II, § 3) de storingen tengevolge van de wrijving en van de eindige amplituden geelimineerd.

Om nu  $\Pi$  uit deze gemiddelde waarneming te vinden, maken wij gebruik van

$$\cos 2\delta = Tg\psi' \cotg \varepsilon,$$

welke men verkrijgt door toepassing van den regel van NEPER op den aanvankelijk rechthoekigen driehoek van onze constructie (C). Is  $2\delta$  gevonden en noemt men den hoek, die er in 't eerste kwadrant medeovereenkomt,  $2\delta_1$ , zoo geeft de duur van de waargenomen onderperiode

$$2\delta_1 : \pi = T_1 : \Pi,$$

waardoor met  $\psi'$  tevens  $p - q$  en  $\Omega'$  bekend zijn.

Volgens de formules op pg. 225 kunnen wij dan door gewichten op het tafeltje te zetten tot eene willekeurige andere waarde van  $\psi_n$  en  $\Pi$  overgaan.

[3] Wij kunnen nu tot de proeven zelve overgaan. Daarbij eliminceeren wij den invloed van de eindige amplituden en van de wrijving recht evenredig aan de snelheden volgens II § 3 2<sup>e</sup> Stuk door twee proeven met dezelfde aanvankelijke slingerwijdte, maar waarvan het beginazimuth  $90^\circ$  verschilt, te verrichten en hiervan het gemiddelde te nemen, zooals dit op pg. 193 is aangegeven.

Bij mijn slinger was nu inderdaad de wrijving recht evenredig aan de snelheden de voornaamste oorzaak van de afname der slingeringen. Zij moet verreweg voor het grootste deel op rekening van de weerstand, die de messen bij de beweging op de pannen onder vinden worden gesteld. Dit blijkt uit de volgende berekening.

Den invloed van de lucht op de slingerende beweging van een bol opgehangen aan een dunnen draad kan men volgens pg. 388 van KIRCHHOFF'S *Vorlesungen über Mechanik* bepalen. Noemt men  $T_0$  den duur van een enkele slingering in 't luchtledige in secunden,  $R$  de straal van den slingerbol in centimeters,  $\mu'$  zijne dichtheid,  $\mu$  die van de omringende lucht en  $K$  de wrijvingscoëfficiënt van de lucht in centimetermaat, zoo neemt de Neperiaansche logarithmus van de slingerwijdte per secunde af ten bedrage van

$$-\frac{\sqrt{\pi K \mu}}{\mu' R \sqrt{2} T_0};$$

bij mijn slinger was  $R = 6.81$ ,  $\mu'$  (lood)  $= 11.35$ ,  $K = 0,000175$  (O. E. MEIJER, *Kinetische Theorie der Gase*, p. 140),  $T_0 = 1''.10$ , en  $\mu = 0.00129$  bij  $0^\circ$  en wanneer de spanning van de lucht  $760^{mm}$  is. Dus in dit laatste geval

afname *Brigg. log.* per minuut . . . 0.000436 in lucht van 760<sup>mm</sup>,  
 en afname *Brigg. log.* per minuut . . . 0.000138 in lucht van 76<sup>mm</sup>.

Beide grootheden zou men lettende op den slingerstang en op den term met den coëfficiënt  $\beta$ , van O. E. MEIJER'S *Pendelbeobachtungen* (*Pogg. Ann.* Bd. 142) een weinig grooter vinden.

De werkelijk waargenomen veranderingen van dien logarithmus per minuut waren bij slingeringen om elk der messen afzonderlijk:

(18 en 19 Oct 77) om het bovenste mes,

in lucht van  $\frac{1}{10}$  atm.

in lucht van 1 atm.

| Amplitude. | Afname van de Br. log.<br>der ampl. per minuut. | Amplitude. | Afname enz. |
|------------|-------------------------------------------------|------------|-------------|
| 5.0-4.5    | 0.00138                                         |            |             |
| 4.5-3.0    | 118                                             | 4.0-2.2    | 0.00171     |
| 3.0-2.2    | 114                                             | 2.2-1.7    | 180         |
| 2.2-1.9    | 92                                              |            |             |
| 1.9-1.7    | 75                                              |            |             |

(20 en 21 Oct. 77) om het benedenmes,

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| 5.0-3.6 | 0.00143 |         |         |
| 5.0-3.2 | 138     | 5.2-1.4 | 0.00184 |
| 3.6-2.5 | 131     | 1.4-0.7 | 152     |
| 4.5-0.8 | 126     |         |         |
| 0.8-0.7 | 113     |         |         |

De wrijving blijkt dus hoofdzakelijk aan de messen plaats te vinden, zoodat ik wegens de langzame afname van den invloed der lucht met de dichtheid ook nooit verder dan tot op  $\frac{1}{10}$  atm. verdunde. Dat zij niet zooals in 't algemeen bij de beweging van vaste lichamen ten opzichte van elkaar onafhankelijk van de snelheid is behoeft ons niet te verwonderen wanneer wij letten op de geheel verschillende omstandigheden bij de wrijving aan het mes waar slechts eene scherpe kant met de pan, en de gewone gevallen, waar betrekkelijk groote oppervlakken der lichamen met elkaar in aanraking zijn.

De wrijving onafhankelijk van de snelheid (de rollende en slepende) heeft volgens deze cijfers zeker slechts een geringen invloed. Proeven met kleinere amplituden zouden den invloed daarvan beter aan hebben kunnen toonen, wanneer niet tegelijkertijd daarbij fouten door toevallige schuddingen van den toestel in dezelfde mate grooter werden. De verkregen getallen deden niet verwachten, dat ik met mijne hulpmiddelen op deze wijze meer van de wrijvingswet te weten zou kunnen komen dan dat na den term evenredig aan de snel-

heid in de eerste plaats de wrijving evenredig aan de tweede macht van de snelheid in aanmerking komt.

Volgens het 2<sup>e</sup> Stuk II §§ 4 en 5 blijft dus, wanneer wij op de aangegeven wijze twee samenhoorende proeven tot een gemiddelde hebben vereenigd nog eene afwijking van de theorie over, die voornamelijk daarin merkbaar wordt, dat het azimuth waarin de slingeren ten tweede male rechtlijnig worden, niet, zooals de theorie vordert, het oorspronkelijk azimuth is. Voor de verbetering van deze kleine afwijking moeten wij natuurlijk op het 2<sup>e</sup> Stuk verwijzen. Wanneer de afwijkingen de bij onze proeven waargenomene niet overschrijden kan men volgens pg. 201 in eerste benadering eenvoudig die verbetering aanbrengen alsof de eindafwijking  $X_2 - X_0$  afkomstig was van een verschil in wrijving rechtevenredig aan de snelheid om beide messen. Buitendien kan deze overblijvende afwijking ook het gevolg zijn van eene gebrekkige eliminatie der wrijving rechtevenredig aan de snelheid, wanneer bij het in beweging brengen voor de tweede proef de slinger zich misschien iets over de pannen verplaatst heeft en daardoor de wrijvingscoëfficiënten om de messen iets veranderd zijn. Wij zullen dus in vele gevallen de afwijkingen eenvoudigheds-halve op deze wijze verbeteren.

#### § 6. *Andere toestel en wijze van waarneming.*

Op Pl. IV, fig. 1, 2, 3, is eene andere wijze van ophanging afgebeeld, die door mij bij dergelijke proeven als de hier behandelde gebruikt werd. Bij den eersten toestel omvatte de slingerstang als beugel de messen, hier gaat hij midden door den drager en door het mes, dat de beweging om eene vaste as mogelijk maakt. De stalen slingerstang, *b*, draagt aan 't einde een looden bol van 5 kilo, en rust met het mes *a* op eenigzins matgeslepen glasplaatjes, *p*. Deze hangen in koperen, den slingerstang tusschen zich doorlatende, beugels, *e*, in wier uitdieping zij met lak zoo bevestigd zijn, dat hunne bovenzijden in een zelfde vlak vallen, aan een koperen raam, *c*, dat het mes *a* omgeeft en hier den drager vormt. De beweging daarvan om eene vaste as wordt hier verkregen met behulp van twee aan dit raam bevestigde messen, *d*, wier scherpe kanten in een zelfde lijn liggen en op vaste glasplaatjes, *q*, rusten. De laatste zijn op een koperen plaat, *f*, bevestigd naast eene opening, die aan de verschillende deelen van den slinger genoegzame vrijheid van bewe-

ging laat. Deze plaat vormt op een balk of driehoek bijv. gelegd de ondersteuning van den geheelen toestel.

De scherpe kanten der messen  $d$  liggen in het vlak der bovenzijden van de glasplaatjes  $e$ ; waardoor de twee bewegingsassen van den slinger weder in een zelfde vlak komen te liggen. Remschroefjes,  $r$ , veroorloven weer de beweging om eene der messen willekeurig te verhinderen; terwijl men de traagheidsmomenten kan veranderen door over het draaibare armpje,  $w$ , de loopgewichten,  $l$ , te verschuiven. Om den slinger in een willekeurig azimuth in slingeringen van willekeurige amplitude te brengen, diende hierbij de eenvoudige en terstond uit fig. 4 begrijpelijke toestel,  $g$ .

De bepaling van het azimuth der slingeringen geschiedde echter op eene wezentlijk andere wijze. Op een tafeltje,  $t$ , droeg de slinger een spiegeltje,  $s$ ; daarboven werd om de gezichtslijn horizontaal te maken een rechthoekig gelijkbeenig prisma geplaatst. Richt men hierop een kijker zoo kan men het door  $s$  gevormde spiegelbeeld van den nevens den kijker geplaatsten, in fig. 6 afgebeelden, toestel daarin waarnemen. Bij de beweging van  $s$  verplaatst zich dit spiegelbeeld in den kijker. Stelt men aanvankelijk kruisdraden van den kijker in op het spiegelbeeld van het middelpunt,  $o$ , van den verdeelden cirkel in fig. 6, wanneer de slinger zich in zijn evenwichtsstand in rust bevindt; zoo zal bij vlakke slingeringen het spiegelbeeld van  $o$  zich in den kijker in een rechte lijn verplaatsen. Men zal dan de schaal,  $k$ , die met de holle as,  $m$ , aan den verdeelden cirkel (waarin bij den eersten toestel de oculairbuis van den kijker bevestigd werd) verbonden is, zoo kunnen draaien, dat het spiegelbeeld van de lijn  $ok$  met deze lijn samenvalt en zij zich dus over zich zelf door het kruispunt van de kijkerdraden schijnt te verschuiven. Met behulp van den nonius,  $n$ , kan men voor elke vlakke slingering den daarbij behoorenden stand van de schaal aflezen. Worden de slingeringen elliptisch zoo beschrijft  $o$  in den kijker eene ellips om het kruispunt der draden, of schijnbaar dit laatste eene ellips op de schaal. Men stelt nu op de groote as zooals te voren op de rechte lijn der slingeringen in; de verhouding van de beide assen der slingeringsellips wordt met behulp van de verdeelingen op de schaal bepaald.

Laten wij nu nagaan in welke betrekking de hoek van het slingervlak met een willekeurig door de spiegel normaal gelegd (verticaal) vlak staat tot de overeenkomstige instelling van den nonius,  $n$ .

Daarbij bepalen wij den stand van den kijker en de schaal alleen

daardoor, dat in den evenwichtsstand van den slinger het spiegelbeeld van het middelpunt van de schaal,  $o$ , in het gezichtsveld van den kijker met het kruispunt der draden samenvalt, en dat de gezichtslijn naar  $o$  tevens de draaiingsas van de schaal is.

Trek door het middelpunt,  $o$ , van een willekeurigen bol  $OK$  evenwijdig aan de straal, die door de spiegel en vervolgens door het prisma teruggekaatst in de kijkeras valt,  $ON$  evenwijdig aan de spiegelnormaal in den evenwichtsstand van den slinger, en  $OS$  aan die straal, welke, uitgaande van het midden van de schaal door spiegeling de richting  $OK$  verkrijgt. Beschouw bij de beweging van den spiegel  $OK$  standvastig en de richting van de straal, die deze door spiegeling oplevert als veranderlijk met den stand van de spiegelnormaal. Laat verder  $Nn'$  een stukje zijn van de doorsnede van het voorloopig onbepaald gelaten verticaalvlak, ten opzichte waarvan zich het azimuth der slingeren bepaalt, met den bol en laat de slingeren van  $ON$ , wier azimuth bepaald moet worden, zich op den bol als  $Nn''$  afteekenen. De teruggekaatste straal van  $OK$  beschrijft, overeenkomstig met  $Nn'$  en  $Nn''$ ,  $Ss'$  en  $Ss''$ . Nu moet bepaald worden de  $\angle N = \angle n'Nn''$  uit  $\angle S = \angle s'Ss''$ , welken men onmiddellijk vindt door de draaiingsas van onze schaal (fig. 6) in  $OS$  te leggen en de eene maal de lijn  $oK$  op  $Ss'$  de andere maal op  $Ss''$  in te stellen. Wij nemen daartoe  $n'$  en  $n''$  op denzelfden grooten cirkel door  $OK$ , waarop dan ook  $s'$  en  $s''$  leggen, verder  $Nn$  oneindig klein en  $n'$  met  $N$  op denzelfden grooten cirkel loodrecht op  $KNS$  of zooals men ook zeggen mag op denzelfden parallelcirkel loodrecht op  $OK$ . Deze laatste keuze bepaalt het tot nog toe onbepaald gelaten verticaalvlak, van waaruit wij het azimuth zullen tellen. Het staat loodrecht op het vlak door de stralen  $OK$  en  $OS$  gelegd. Volgens de gemaakte onderstellingen mag men de bolvormige driehoekjes  $Nn'n''$  en  $Ss's''$  als twee vlakke rechthoekige driehoekjes beschouwen. Wanneer men nu den hoek  $KON = p$  stelt, is

$$s'S : n'N = \text{Sin } 2p : \text{Sin } p,$$

en volgens de wetten der spiegeling

$$2n'n'' = s's''.$$

Uit  $n'n'' = n'NTgN$  en  $s's'' = s'STgS$ ,

volgt dus terstond

$$TgN = TgS \text{Cos } p,$$

waardoor het ware azimuth  $N$  uit het waargenomene wordt gevonden. Bij mijne proeven was  $p$  zeer klein en kon de afwijking van  $\text{Cos } p$  van 1 zeker verwaarloosd worden, daarbij was dus  $N = S$ .

Ten slotte moge hier nog worden opgemerkt, dat men den slingertijd bij onzen slinger in verschillende richtingen ook daardoor verschillend kan maken, dat men het zwaartepunt van den drager door er massa's aan toe te voegen verplaatst. Dit geval is in het 2<sup>e</sup> Stuk theoretisch behandeld en men kan er met voordeel gebruik van maken, wanneer men met een langeren slinger werkt.

---

## HOOFDSTUK III.

### DE PROEVEN.

---

#### § 1.

Wij gaan nu over tot eene meer nauwkeurige beschouwing van de proeven, die de theorie van het eerste Hoofdstuk bevestigen en als bewijs voor de draaiing der aarde dienen moeten.

Daar het natuurkundig laboratorium te Groningen zich bevindt op de tweede verdieping van een gebouw, welks aangrenzende vertrekken druk gebruikt worden, en er geen afzonderlijk gefundeerde grondslag aanwezig is, moest ik mij behelpen met een als bergruimte gebruikt sousterrain. Wel is waar kon ik hier slechts een slinger van 1,2 M. lengte gebruiken, terwijl 2 M. mij daarvoor het meest gewenscht scheen; ook moest ik mijne oogen aan de nadeelen van het verrichten van talrijke fijne metingen bij petroleumverlichting blootstellen, en verdreef de vochtigheid mij ten slotte uit het local; maar het bood de gelegenheid om ten minste eenigermate een vasten grondslag te verkrijgen, door paaltjes in den grond te heijen, en de verschijnenselen, welke de theorie deed verwachten, boezemden mij te veel belangstelling in, om niet te beproeven ze ook met gebrekkige hulpmiddelen waar te nemen en met de theorie te vergelijken. De vastheid van den zoo verkregen grondslag stelde mij nog te leur, zoodat ik veel grooter amplituden gebruiken moest, dan oorspronkelijk in n.ijn plan lag.

Naast de herinnering aan deze moeilijkheden is het mij eene aangename plicht den heer H. DEUTGEN mijnen hartelijken dank te betuigen voor de welwillendheid en het vernuft, waarmede hij mij vooral bij het inrichten van den toestel ter zijde stond.

## WAARNEMINGEN VAN DE KLASSE B. II.

§ 2. *De normale onderperiode gaat vooraf.*

[A] Gebruikt de toestel met stalen messen en drager. De messen zorgvuldig horizontaal gesteld.

Azimuth van het benedenmes  $3^{\circ}24'$  van het bovenmes  $93^{\circ}26'$ .

Wanneer het beeld van het dradennet van den slinger in het veld van den kijker 699 deelen van den micrometer doorloopt, zoo komt dit overeen met eene beweging van het dradennet zelf over een afstand van  $7^{\text{mm}}.89$ , en, daar het op  $1400^{\text{mm}}$  afstand van het ophangpunt ligt, met eene amplitude:  $\frac{7.89}{1400}$ .

Op den rand van het tafeltje aan weerszijden 1.5 HG in azimuth  $-45^{\circ}$  ten opzichte van het benedenmes.

Als voorbeeld geven wij de volledige waarnemingen in dit geval op.

[A. I]

| Tijd.                 | Azimuth van groote as. | Zin van beweging in ellips. | Instelling van den micrometer in geheelen en 40 <sup>e</sup> deelen op |                                 |                               |                                 |
|-----------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
|                       |                        |                             | het eene einde der kleine as.                                          | het andere einde der kleine as. | het eene einde der groote as. | het andere einde der groote as. |
| (a) $6^{\text{u}}42'$ |                        | 0                           |                                                                        |                                 |                               |                                 |
| $42'45''$             | $-7^{\circ}10'$        | +                           |                                                                        |                                 |                               |                                 |
| $44'15''$             |                        |                             |                                                                        |                                 | 2-14                          |                                 |
| $46'50''$             |                        |                             |                                                                        |                                 |                               | 17-11                           |
| $48'30''$             |                        |                             | 10-38                                                                  | 10-6                            |                               |                                 |
| $51'$                 |                        |                             |                                                                        |                                 | 2-8,5                         |                                 |
| $52'30''$             |                        |                             |                                                                        |                                 |                               | 16-22                           |
| $55'$                 | $-3^{\circ}36'$        | +                           |                                                                        |                                 |                               |                                 |
| $58'$                 |                        | +                           | 10-38                                                                  | 12-23                           |                               |                                 |
| $7^{\text{u}}7'$      | $2^{\circ}36'$         | +                           |                                                                        | 13-0                            |                               |                                 |
| $9'$                  |                        |                             |                                                                        |                                 | 2-26                          |                                 |
| $10'45''$             |                        |                             |                                                                        |                                 |                               | 15-28,5                         |
| $14'$                 | $4^{\circ}48'$         | +                           | 10-38                                                                  | 13-1                            |                               |                                 |
| $16'$                 |                        |                             |                                                                        |                                 |                               | 15-8                            |
| $17'10''$             |                        |                             |                                                                        |                                 | 2-27                          |                                 |
| $21'$                 | $7^{\circ}44'$         | +                           | 10-38                                                                  | 12-33                           |                               |                                 |
| $23'$                 |                        |                             |                                                                        |                                 |                               | 15-15                           |
| $25'6''$              |                        |                             |                                                                        |                                 | 3-6                           |                                 |
| $30'20''$             | $12^{\circ}12'$        | +                           | 10-38                                                                  | 12-18                           |                               |                                 |
| $33'$                 |                        |                             |                                                                        |                                 |                               | 15-1                            |
| $34'30''$             |                        |                             |                                                                        |                                 | 3-13                          |                                 |
| $39'40''$             | $15^{\circ}50'$        | +                           | 10-38                                                                  | 11-33                           |                               |                                 |
| $42'$                 |                        |                             |                                                                        |                                 |                               | 14-39                           |

| Tijd.             | Azimuth<br>van<br>grootte as. | Zin van<br>beweging in<br>ellips. | Instelling van den micrometer in<br>geheelen en 40 <sup>e</sup> deelen op |                                       |                                      |                                        |         |            |       |
|-------------------|-------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------|---------|------------|-------|
|                   |                               |                                   | het eene<br>einde der<br>kleine as.                                       | het andere<br>einde der<br>kleine as. | het eene<br>einde der<br>grootte as. | het andere<br>einde der<br>grootte as. |         |            |       |
| (b)               | 43'45"                        | 18°34'                            | 0                                                                         |                                       |                                      | 3-23                                   |         |            |       |
|                   | 7 <sup>u</sup> 50'6"          |                                   |                                                                           |                                       |                                      | 3-34                                   |         |            |       |
|                   | 52'                           |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         |            |       |
|                   | 53'30"                        |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         | 14-33      |       |
|                   | 55'                           |                                   |                                                                           |                                       | —                                    | 10-38                                  | 11-12   |            |       |
|                   | 8 <sup>u</sup> 3'40"          |                                   |                                                                           | 19°28'                                | —                                    | 10-38                                  | 11-36,5 | Max.scheen | 20°   |
|                   | 6'                            |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         |            | 14-35 |
|                   | 7'                            |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         |            |       |
|                   | 14'                           |                                   |                                                                           | 18°0'                                 | —                                    | 10-38                                  | 12-24   | 4-26       |       |
|                   | 15'30"                        |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         |            | 14-16 |
|                   | 18'                           |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         | 4-39       |       |
|                   | 27'                           |                                   |                                                                           | 14°30'                                | —                                    | 10-38                                  | 13-9    |            |       |
|                   | 28'30"                        |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         |            | 14-5  |
|                   | 30'                           |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         | 5-17       |       |
|                   | 41'                           |                                   |                                                                           | 8°30'                                 | —                                    | 10-38                                  | 13-9    |            |       |
|                   | 44'30"                        |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         | 2-38       | 10-38 |
|                   | 47'                           |                                   |                                                                           | 7°44'                                 | —                                    | 10-38                                  | 13-20,5 |            |       |
|                   | 49'                           |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         | 3-4        | 10-38 |
|                   | 52'30"                        |                                   |                                                                           | 3°20'                                 | —                                    | 10-38                                  | 8-24    |            |       |
|                   | 57'30"                        |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         | 3-11       | 10-38 |
| 9 <sup>u</sup> 1' | 0°8'                          | —                                 | 10-38                                                                     | 13-0                                  |                                      |                                        |         |            |       |
| 14'               | —4°6'                         | —                                 | 10-38                                                                     | 12-13                                 |                                      |                                        |         |            |       |
| 16'30"            |                               |                                   |                                                                           |                                       | 3-33                                 | 10-38                                  |         |            |       |
| 26'               | —4°30'                        | —                                 | 10-38                                                                     | 11-27                                 |                                      |                                        |         |            |       |
|                   |                               |                                   |                                                                           |                                       | Min.scheen<br>4-45                   | —8°                                    |         |            |       |
| (c)               | 28'                           |                                   |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         |            |       |
|                   | 40'                           |                                   | 0                                                                         |                                       |                                      |                                        |         |            |       |
|                   | 41'                           | —2°32'                            |                                                                           |                                       |                                      |                                        |         |            |       |
|                   | 42'15"                        |                                   |                                                                           |                                       |                                      | 4-20                                   | 10-38   |            |       |

## [A. II]

|     |          |        |   |       |       |      |         |
|-----|----------|--------|---|-------|-------|------|---------|
| (a) | 7°32'15" | 81°28' | 0 |       |       |      |         |
|     | 34'      | 81°28' | — |       |       |      |         |
|     | 36'      |        |   |       |       | 2-12 |         |
|     | 37'15"   |        |   |       |       |      | 14-34,5 |
|     | 40'30"   | 84°36' | — | 10-38 | 11-18 |      |         |
|     | 44'30"   |        |   |       |       | 2-38 |         |
|     | 46'      |        |   |       |       |      | 14-28   |

| Tijd.           | Azimuth van groote as. | Zin van beweging in ellips. | Instelling van den micrometer in geheelen en 40 <sup>e</sup> deelen op |                                 |                               |                                 |        |
|-----------------|------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|--------|
|                 |                        |                             | het eene einde der kleine as.                                          | het andere einde der kleine as. | het eene einde der groote as. | het andere einde der groote as. |        |
|                 | 50'30"                 | 87°12'                      | —                                                                      | 10-38                           | 9-38                          |                                 |        |
|                 | 54'30"                 | 87°56'                      | —                                                                      | 10-38                           | 9-36                          |                                 |        |
|                 | 56'45"                 | 88°                         | —                                                                      | 10-38                           | 9-35                          |                                 |        |
|                 | 58'15"                 |                             |                                                                        |                                 |                               | 3-23                            |        |
|                 | 59'15"                 |                             |                                                                        |                                 |                               |                                 | 14-20  |
| 8 <sup>u</sup>  | 2'                     | 89°52'                      | —                                                                      | 10-38                           | 9-35                          |                                 |        |
|                 | 6'                     | 91°12'                      | —                                                                      | 10-38                           | 9-39                          |                                 |        |
|                 | 7'                     |                             |                                                                        |                                 |                               | 4-27.5                          |        |
|                 | 8'6"                   |                             |                                                                        |                                 |                               |                                 | 15-0   |
|                 | 11'                    | 92°28'                      | —                                                                      | 10-38                           | 10-3                          |                                 |        |
|                 | 21'                    | 97°                         | —                                                                      | 10-38                           | 10-8                          |                                 |        |
|                 | 22'6"                  |                             |                                                                        |                                 |                               | 4-39                            | 14-3   |
|                 | 23'                    |                             |                                                                        |                                 |                               |                                 |        |
| (b)             | 40'                    |                             | 0                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
|                 | 41'                    | 103°44'                     | +                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
|                 | 43'20"                 |                             |                                                                        |                                 |                               | 10-38                           | 2-31   |
|                 | 53'                    | 106°40'                     | +                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
|                 | 59'                    | 107°56'                     | +                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
| 9 <sup>u</sup>  | 2'                     | 106°50'                     | +                                                                      | 10-38                           | 9-38                          |                                 |        |
|                 | 5'30"                  |                             |                                                                        |                                 |                               | 10-38                           | 4-26   |
|                 | 14'                    | 106°32'                     | +                                                                      | 10-38                           | 9-13                          |                                 |        |
|                 | 23'45"                 | 99°                         | +                                                                      | 10-38                           | 8-36                          |                                 |        |
|                 | 25'                    |                             |                                                                        |                                 |                               | 10-38                           | 5-32   |
|                 | 32'                    | 92°                         | +                                                                      | 10-38                           | 8-35                          |                                 |        |
|                 | 35'30"                 |                             | +                                                                      |                                 |                               | 10-38                           | 5-39   |
|                 | 38'30"                 | 88°16'                      | +                                                                      | 10-38                           | 8-39                          |                                 |        |
| 10 <sup>u</sup> | 1'                     | 80°8'                       | +                                                                      | 10-38                           | 8-39                          |                                 |        |
|                 | 3'                     |                             |                                                                        |                                 |                               | 10-38                           | 6-21   |
|                 | 11'30"                 | 71°                         | +                                                                      | 10-38                           | 9-26                          |                                 |        |
| 10 <sup>u</sup> | 12'45"                 |                             | +                                                                      | 10-38                           | 9-23                          |                                 |        |
|                 | 14'                    | 70°                         | +                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
|                 | 16'                    |                             | +                                                                      | 10-38                           | 9-36                          |                                 |        |
|                 | 21'                    | 70°                         | +                                                                      | 10-38                           | 10-4                          |                                 |        |
|                 | 22'30"                 |                             |                                                                        |                                 |                               | 10-38                           | 7-1    |
|                 | 24'                    | 69°                         | +                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
|                 | 33'                    | 72°12'                      | +                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
| (c)             | 45'                    | 74°                         | 0                                                                      |                                 |                               |                                 |        |
|                 | 49'                    |                             |                                                                        |                                 |                               | 10-38                           | 7-20,5 |

OPMERKING. 10-38 komt overeen met den vasten draad van den micrometer. Voor de onregelmatigheid van de micrometerschroef moet aan de aflezingen de volgende verbetering worden aangebracht: 2-0 tot 10-0 komt overeen met de werkelijke waarde van 2-0 tot 10-10; 11-0 = 10-39, 12-0 = 11-38, 13-0 = 12-37, 14-0 = 13-36, 15-0 = 14-35, 16-0 = 15-33, 17-0 = 16-31.

Wij vereenigen de twee voorgaande proeven tot het volgende schema

|            | [A. I]                            | [A. II].                         | Gemiddelde.                     | Verbeterd.                 |
|------------|-----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| $(X_0)$    | $-10^{\circ}43' \beta_0 = 5.5528$ | $78^{\circ}4' \beta_0 = 5.4177$  | $-11^{\circ}19'$                | $-11^{\circ}19'$           |
| $\alpha_1$ | $9^{\circ}6' [+]'$                | $5^{\circ}33' [-]'$              | $7^{\circ}19' \frac{1}{2} [+]'$ | $7^{\circ}10' \frac{1}{2}$ |
| $T_1$      | $1^h.1350$                        | $1^h.1292$                       | $1^h.1321$                      | $1^h.1258$                 |
| $(X_1)$    | $15^{\circ}10' \beta_1 = 5.2858$  | $100^{\circ}8' \beta_1 = 5.0456$ | $12^{\circ}39'$                 | $12^{\circ}18'$            |
| $\alpha_2$ | $17^{\circ}34' [-]'$              | $21^{\circ}51' [+]'$             | $19^{\circ}42 \frac{1}{2} [-]'$ | $18^{\circ}54 \frac{1}{2}$ |
| $T_2$      | $2^h.9667$                        | $3^h.2125$                       | $3^h.0896$                      | $3^h.1156$                 |
| $(X_2)$    | $-6^{\circ}8' \beta_2 = 4.8291$   | $70^{\circ}36' \beta_2 = 4.2943$ | $-12^{\circ}46'$                | $-11^{\circ}19'$           |

Hierin is  $(X)$  het azimuth ten opzichte van het vaste mes, dus  $(X) = X + \psi_D$ ; verder  $\beta$  (als op pg. 201) de dubbele Briggische logarithmus van de dubbele amplitude uitgedrukt in afdeelingen ( $40^e$  deelen) van den micrometer; de teekens  $[ \pm ]'$  duiden op onze gewone wijze den waargenomen zin van de beweging in de door  $\alpha$  bepaalde ellips aan.

Om de verbeteringen in de laatste kolom te verkrijgen werd de berekeningswijze van Hoofdstuk II § 6 [2] toegepast op de eerste onderperiode in de kolom „gemiddelde.” Zij geeft  $\psi = 180^{\circ} - \psi'$ , daar de  $x$ -as in de normale periode met positieve ellipsen overschreden wordt; verder  $\psi_D = 40'$ , waarvoor men dus zonder merkbare fout  $\psi_D = 0$  mag stellen, verder

$$\psi' = 12^{\circ}1' \frac{1}{2}, \quad 2\delta = -64^{\circ}55', \quad \varepsilon = 26^{\circ}40' \frac{1}{2}.$$

Daardoor worden in (131) en (132) van 't 2<sup>e</sup> Stuk

$$c_D = 0 \quad \text{en} \quad b'_D = 0,$$

en afgezien van den coëfficiënt  $\frac{A_D - B_D}{2}$  (vergel. pg. 195)

$$\text{Log } a_D = 9'.6426, \quad \text{Log } b_D = \bar{2}.5219, \quad \text{Log } c'_D = \bar{2}.6176.$$

De aan te brengen verbeteringen volgen nu uit het 2<sup>e</sup> Stuk II § 1 [1] en [2]; nl.

$$\Delta \delta_1 = 0, \quad \Delta \delta_2 = 0,$$

en afgezien weer van den coëfficiënt  $\frac{A_D - B_D}{2}$ ,

$$\text{Log } \Delta \varepsilon_1 = 3.0747, \quad \text{Log } \Delta \varepsilon_2 = 3.6889,$$

$$\text{Log } \Delta \varepsilon_{\frac{1}{2}} = 2.7737, \quad \text{Log } \Delta \varepsilon_{\frac{2}{3}} = 3.4823.$$

Daar  $\Delta X_2 = -87'$  moet zijn volgt hieruit (vergel. pg. 201)

$$\Delta \chi_1 = 9', \quad \Delta \chi_2 = 48', \quad \Delta X_1 = 21',$$

$$\Delta T_1 = 0^h.0063, \quad \Delta T_2 = -0^h.0260.$$

Wij gaan nu de uitkomsten vergelijken met de theorie.

[a] Volgens n°. 38 van 't 1<sup>e</sup> Stuk vinden wij

$$\psi' = \chi_2 - \chi_1 = 11^{\circ}44'.$$

[b] Volgens de berekeningswijze in Hoofdst. II § 5 [2] met

$$2\chi_1 = 14^{\circ}21', \quad 2X_0 = 23^{\circ}37', \quad 2\chi_2 = 37^{\circ}49',$$

$$\begin{aligned} \text{Log } \frac{1 - \text{Cos } 2X_0 \text{Cos } 2\chi_1}{\text{Cos } 2X_0 \text{Sin } 2\chi_1} = 9'.6946 &= \left| \text{Log } \frac{1 - \text{Cos } 2\chi_0 \text{Cos } 2\chi_2}{\text{Cos } 2X_0 \text{Sin } 2\chi_2} = 9'.6916 = \right. \\ = \text{Log } \text{Tg } \varepsilon, \quad \varepsilon = 26^{\circ}20', & \left| = \text{Log } \text{Tg } \varepsilon, \quad \varepsilon = 26^{\circ}11', \right. \end{aligned}$$

$$[b_1] \dots \psi' = \varepsilon - 2\chi_1 = 11^{\circ}59'; \quad | \quad [b_2] \dots \psi' = 2\chi_2 - \varepsilon = 11^{\circ}38';$$

$$[b] \text{ Gemiddelde } \psi' = 11^{\circ}48'\frac{1}{2}.$$

[c]. Volgens de tweede berekeningswijze van n°. 38 van 't 1<sup>e</sup> Stuk

$$\frac{T_1}{T_2} \pi = \frac{1.1258}{3.1156} 180^{\circ} = 65^{\circ}4' = -2\delta,$$

$$\text{Log } \frac{\text{Tg } 23^{\circ}37'}{\text{Tg } 65^{\circ}4'} = 9'.3081 = \text{Log } \text{Sin } \psi; \quad [c'] \dots \psi' = 11^{\circ}44'.$$

De betrekking opgesteld in n°. 30 van 't 1<sup>e</sup> Stuk wordt bevestigd door

$$\text{Log } \sqrt{\text{Tg } \chi_1 \text{Tg } \chi_2} = 9'.3173 = \text{Log } \text{Tg } X_r, \quad X_r = 11^{\circ}44',$$

terwijl voor  $X_0 = X_1$  waargenomen werd  $\frac{23^{\circ}37'}{2} = 11^{\circ}48'\frac{1}{2}$ , welke

overeenstemming inderdaad zeer bevredigend is. Deze berekende waarde van  $X_0$  in plaats van de waargenomen waarde invoerende in de berekening, die tot [c<sub>1</sub>] voerde, vinden wij

$$[c_2] \dots \psi' = 11^{\circ}39'$$

en voor het gemiddelde van beiden

$$[c] \dots \psi' = 11^{\circ}41'\frac{1}{2}.$$

Volgens de theorie moesten de waarden

$$\left. \begin{array}{l} [a] \quad 11^{\circ}44' \\ [b] \quad 11^{\circ}48\frac{1}{2}' \\ [c] \quad 11^{\circ}41\frac{1}{2}' \end{array} \right\} \text{gemiddeld } \psi' = 11^{\circ}45'$$

dezelfde zijn, gelijk ook in zeer bevredigende mate het geval is. Berekent men met hunne middelwaarde  $\gamma$  zoo vindt men deze uit den duur van de geheele periode met (126) van 't 1<sup>e</sup> Stuk

$$\gamma = -11^{\circ},77 \text{ per uur middelbare tijd.}$$

Volgens pg. 225 de verbetering daarvoor aanbrengende, dat  $\frac{R}{2P} = \frac{1}{400}$  is, zooals uit de afmetingen van den slinger werd gevonden, wordt

$$[A] \dots \gamma_w = -11^{\circ},80 \text{ per uur middelbare tijd.}$$

Deze waarde moet gelijk zijn aan de draaiingssnelheid van de aarde om de verticaal van Groningen

$$[\text{theorie}] \dots \gamma_w = -12^{\circ},03 \text{ per uur middelbare tijd,}$$

waarvan zij inderdaad slechts weinig afwijkt.

De verdere proeven zullen wij schematisch mededeelen, voor zover zij zich twee aan twee laten samenvoegen.

[E]

Gebruikt de toestel met stalen messen en pannen.

De messen zorgvuldig horizontaal gesteld.

Azimuth van het bovenmes  $83^{\circ}20'$ ,

Azimuth van het benedenmes  $173^{\circ}28' (-6^{\circ}32)$ ,

$$483 \text{ afdeelingen van den micrometer} = \frac{7.89}{1400}.$$

Het verschil in wrijving aan de messen gedeeltelijk opgeheven door oliweerstand.

|            | [E. V] 17 Juli.                   | [E. VI].                          | Gemiddelde.                       | Verbeterd.                 |
|------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| $(X_0)$    | $-24^{\circ}28' \beta_0 = 5.3882$ | $65^{\circ}36' \beta_0 = 5.4736$  | $-24^{\circ}26'$                  | $-24^{\circ}26'$           |
| $\alpha_1$ | $18^{\circ}49\frac{1}{2}' [+]'^r$ | $19^{\circ}30' [-]'^r$            | $19^{\circ}10' [+]'^r$            | $18^{\circ}57'$            |
| $T_1$      | $1^h.717$                         | $1^h.504$                         | $1^h.6105$                        | $1^h.6063$                 |
| $(X_1)$    | $22^{\circ}58' \beta_1 = 4.7146$  | $118^{\circ}12' \beta_1 = 4.8196$ | $25^{\circ}35'$                   | $25^{\circ}8'$             |
| $\alpha_2$ | $32^{\circ}13' [-]'^r$            | $36^{\circ}34' [+]'^r$            | $34^{\circ}23\frac{1}{2}' [-]'^r$ | $33^{\circ}33\frac{1}{2}'$ |
| $T_2$      | $3^h.7125$                        | $3^h.9583$                        | $3^h.8354$                        | $3.8477$                   |
| $(X_2)$    | $-15^{\circ}28' \beta_2 = 3.8432$ | $53^{\circ}58' \beta_2 = 3.7200$  | $-25^{\circ}45'$                  | $-24^{\circ}26'$           |

Hieruit volgt

$$2\psi_D = 42',$$

$$[a] \dots \psi' = 14^{\circ}36\frac{1}{2}',$$

$$[b_1] 12^{\circ}53', [b_2] 15^{\circ}45', [b] \dots \psi' = 14^{\circ}19'.$$

Met de middelwaarde uit deze beide vinden wij

$$\gamma_w \text{ uit de geheele periode } -11^{\circ}.7,$$

$$\gamma_w \text{ uit de eerste onderperiode } -12^{\circ}.2;$$

dus

$$[\text{E. V en VI}] \dots \gamma_w = -12^{\circ}.0.$$

Wij hebben de uitkomst van de berekeningswijze [c], namelijk

$$[c_1] \dots \psi = 18^{\circ}8', \quad [c_2] \dots \psi = 19^{\circ}10',$$

die eene fout in de verhouding van  $T_1$  en  $T_2$  doet onderstellen, wegens de groote afwijking van de uitkomsten [a] en [b], bij de berekening van  $\gamma_w$  niet in aanmerking genomen. Toch is ook de overeenstemming van  $[b_1]$  en  $[b_2]$  verre van bevredigend, zoodat aan de fraaie overeenstemming van  $\gamma_w$  met de theorie in dit geval weinig gewicht moet worden gehecht.

In de volgende proefreeksen werden grootere amplituden genomen om meer onafhankelijk te zijn van toevallige storingen, waaraan ik de afwijkingen in de vorige proeven toeschreef. Tevens werd  $\psi'$  kleiner genomen om den duur van de periode te bekorten, en daardoor een wezenlijk voordeel van mijne methode te doen uitkomen. Dit vorderde kleinere waarden van  $2X_0$  om de berekeningwijze [c] naast de andere te kunnen toepassen, daar anders de waarden van  $2\delta$  te dicht bij  $90^{\circ}$  vallen en eene kleine fout in de verhouding van  $T_1$  en  $T_2$  eene belangrijke verandering in  $\psi$  geeft.

[F]

Gebruikt de toestel met stalen messen en dragers.

Azimuth van het beneden mes  $85^{\circ}20'$ .

De messen zorgvuldig horizontaal gesteld.

$$329 \text{ afdeelingen van den micrometer } = \frac{7.89}{1400}.$$

|            | F. IV. (23 Juli).                  | F. VI.                           | Gemiddelde.           | Verbeterd.       |
|------------|------------------------------------|----------------------------------|-----------------------|------------------|
| $(X_0)$    | $-12^{\circ}4' (\beta_0 = 5.4100)$ | $78^{\circ}52' \beta_0 = 5.5248$ | $-11^{\circ}36'$      | $-11^{\circ}36'$ |
| $\alpha_1$ | $12^{\circ}13' [-]_r$              | $12^{\circ}55' [+ ]_r$           | $12^{\circ}34' [-]_r$ | $12^{\circ}36'$  |
| $T_1$      | 0.8900                             | 0.9903                           | 0.9401                | 0.9401           |
| $(X_1)$    | $21^{\circ}16' \beta_1 = 5.0206$   | $112^{\circ}0' \beta_1 = 5.1180$ | $21^{\circ}38'$       | $21^{\circ}47'$  |
| $\alpha_2$ | $23^{\circ}42' [+ ]_r$             | $17^{\circ}6' [-]_r$             | $20^{\circ}24' [+ ]$  | $20^{\circ}34'$  |
| $T_2$      | 2.1089                             | 2.2528                           | 2.1803                | 2.1784           |
| $(X_2)$    | $-17^{\circ}4' \beta_2 = 4.4654$   | $84^{\circ}46' \beta_2 = 4.6454$ | $-11^{\circ}9'$       | $-11^{\circ}36'$ |

Hieruit volgt

$$2\psi_D = 10^{\circ}11',$$

verder voor

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi' = 7^{\circ}58' \\ [b] \dots \psi' = 8^{\circ}12' \\ [c] \dots \psi' = 8^{\circ}6' \end{array} \right\} \text{gemiddeld } 8^{\circ}5';$$

en uit de geheele periode  $\gamma_w = -11^{\circ}.64$ ,  
 uit de eerste onderperiode  $\gamma_w = -11^{\circ}.69$ ,  
 dus  $[F] \dots \gamma_w = -11^{\circ}.7$ .

Meer standvastige uitkomsten dan andere proeven uit de vorige reeksen leverden de proeven met agaattessen en agaatpannen, waarbij ik tevens nog weder grootere amplituden gebruikte.

[G]

Toestel met agaattessen en pannen; de messen zorgvuldig horizontaal gesteld.

Azimuth van benedenmes  $47^{\circ}2'$ .

Azimuth van bovenmes  $137^{\circ}4'$ .

277.5 afdeelingen van den micrometer  $= \frac{7.89}{1400}$ .

Proef III was eene herhaling van I, wij nemen dus het gemiddelde uit beide en voegen dit op de gewone wijze met II samen.

|          | [G. I] 26 Octob.                  | [G. III] 27 Octob.                |
|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $(X_0)$  | $-11^{\circ}26' \beta_0 = 5.6140$ | $-11^{\circ}38' \beta_0 = 5.6946$ |
| $\chi_1$ | $16^{\circ}7' [-]r$               | $15^{\circ}30' [-]r$              |
| $T_1$    | $1^h 0'$                          | $1^h 2'$                          |
| $(X_1)$  | $28^{\circ}46' \beta_1 = 5.4262$  | $26^{\circ}10' \beta_1 = 5.5091$  |
| $\chi_2$ | $24^{\circ}40' [+]r$              | $23^{\circ}3' [+]r$               |
| $T_2$    | $2^h 13'$                         | $2^h 11'$                         |
| $(X_2)$  | $-16^{\circ}2' \beta_2 = 5.1924$  | $-17^{\circ}26' \beta_2 = 5.3032$ |

|          | [G. I, III].                      | [G. II] 27 Octob.                 | Gemiddelde.          | Verbeterd.       |
|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|------------------|
| $(X)_0$  | $-11^{\circ}32' \beta_0 = 5.6543$ | $80^{\circ}6' \beta_0 = 5.6332$   | $-11^{\circ}43'$     | $-11^{\circ}43'$ |
| $\chi_1$ | $15^{\circ}48' \frac{1}{2} [-]r$  | $11^{\circ}28' [+]r$              | $13^{\circ}38' [-]r$ | $13^{\circ}24'$  |
| $T_1$    | $1^h 1'$                          | $59' 15''$                        | $1^h.0021$           | $1^h.0031$       |
| $(X)_1$  | $27^{\circ}28' \beta_1 = 5.4676$  | $112^{\circ}14' \beta_1 = 5.5162$ | $24^{\circ}51'$      | $24^{\circ}13'$  |
| $\chi_2$ | $23^{\circ}51' \frac{1}{2} [+]r$  | $22^{\circ}30' [-]r$              | $23^{\circ}11' [+]r$ | $-21^{\circ}56'$ |
| $T_2$    | $2^h 12'$                         | $2^h 27' 45''$                    | $2^h.3312$           | $2^h.3412$       |
| $(X)_2$  | $-16^{\circ}44' \beta_2 = 5.2478$ | $81^{\circ}50' \beta_2 = 5.3118$  | $-12^{\circ}27'$     | $-10^{\circ}43'$ |

Hieruit vinden wij

$$2 \psi_D = 13^{\circ}30';$$

verder

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 8^{\circ}32' \\ [b] \dots \psi = 8^{\circ}38'\frac{1}{2} \\ [c] \dots \psi = 9^{\circ}6' \end{array} \right\} \text{gemiddelde } 8^{\circ}45'\frac{1}{2};$$

en hiermede

$$\gamma_w \text{ uit geheele periode } -11^{\circ}.74,$$

$$\gamma_w \text{ uit eerste onderperiode } -11^{\circ}.86;$$

zoodat

$$[G \text{ I, III en II}] \dots \gamma_w = -11^{\circ}.8.$$

Bij G I, III zoowel als bij G. II werd nog eene tweede geheele periode nagegaan. Het oorspronkelijk gebied van beide is echter te zeer verschillend om de wrijving en eindige amplituden door beide samen te voegen te kunnen elimineeren.

[H]

Alles als bij [G]; verder de wrijving aan de messen door olie-weerstand nagenoeg gelijk gemaakt; op den rand van het tafeltje in 't azimuth  $0^{\circ}$  ten opzichte van 't beneden mes aan beide zijden  $7HG$ , en in 't azimuth  $45^{\circ}5HG$ .

In [HIII] werden twee geheele perioden gevolgd; zooals bij [G] vergelijken wij slechts de eerste perioden.

|         | [H. III] (11 Dec.)                | [H. IV] (12 Dec.)                | Gemiddelde.          | Verbeterd.                |
|---------|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------|---------------------------|
| $(X)_0$ | $-29^{\circ}2' \beta_0 = 5.3168$  | $61^{\circ}38' \beta_0 = 5.5074$ | $-28^{\circ}42'$     | $-28^{\circ}42'$          |
| $Z_1$   | $11^{\circ}49' [-]r$              | $12^{\circ}1' [+]r$              | $11^{\circ}55' [-]r$ | $12^{\circ}5'\frac{1}{2}$ |
| $T_1$   | 1.0519                            | 0.9847                           | 1.0183               | 1.0265                    |
| $(X)_1$ | $2^{\circ}30' \beta_1 = 5.1386$   | $93^{\circ}50' \beta_1 = 5.2962$ | $3^{\circ}10'$       | $3^{\circ}36'\frac{1}{2}$ |
| $Z_2$   | $17^{\circ}44'\frac{1}{2} [+]r$   | $22^{\circ}31' [-]r$             | $20^{\circ}8' [+]r$  | $20^{\circ}55'$           |
| $T_2$   | 2.4561                            | 2.3403                           | 2.3982               | 2.3853                    |
| $(X)_2$ | $-25^{\circ}26' \beta_2 = 4.9006$ | $60^{\circ}22' \beta_2 = 5.0452$ | $-27^{\circ}32'$     | $-28^{\circ}42'$          |

Hieruit volgt

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi' = 8^{\circ}49'\frac{1}{2} \\ [b] \dots \psi' = 8^{\circ}55' \\ [c] \dots \psi' = 8^{\circ}1' \end{array} \right\} \text{gemiddelde } 8^{\circ}35';$$

dus

$$\gamma_w \text{ uit de geheele periode } 11,29,$$

$$\gamma_w \text{ uit de eerste onderperiode } 11,18;$$

zoodat

$$[H. III \text{ en IV}] \dots \gamma_w = -11^{\circ}.2.$$

De verbeteringen werden, berekend volgens II, § 5 van 't 2<sup>e</sup> Stuk.

Er werden nu nog proeven verricht in zeer rustige nachten, want er was grond voor het vermoeden, dat windstooten invloed op de beweging van den slinger konden hebben; inderdaad bleek, dat de slinger nadat hij aanvankelijk in rust was gebracht aan zich zelf overgelaten langzamerhand in beweging geraakte, en wel des te sterker naarmate de windkracht grooter was. Het scheen, dat de beweging van het gebouw onder den invloed van den wind zich overplantte naar den slechts onvoldoende er van afgescheiden toestel. In deze proeven, die elk twee geheele opeenvolgende perioden omvatten, werd het aanvankelijk azimuth zoo gekozen, dat zij als herhalingen van dezelfde proef mochten worden opgevat. Wegens deze bijzondere voorzorgen verbeteren wij ze volgens II § 4 van het 2<sup>e</sup> Stuk.

[H. V en VI]. *Eerste periode.*

|          | H. V. 15 Dec.                    | H. VI. 16 Dec.                    | Gemiddelde.                       | Verbeterd.                        |
|----------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $(X_0)$  | $60^{\circ}26' \beta_0 = 5.5062$ | $-30^{\circ}54' \beta_0 = 5.4022$ | $-30^{\circ}14'$                  | $-30^{\circ}14'$                  |
| $\chi_1$ | $11^{\circ}43' [+ ]^r$           | $11^{\circ}57' [- ]^r$            | $11^{\circ}50' [- ]^r$            | $11^{\circ}50' [- ]^r$            |
| $T_1$    | $1^u2'55''$                      | $1^u2'45''$                       | $1^h.0472$                        | $1^h.0472$                        |
| $(X_1)$  | $92^{\circ}54' \beta_1 = 5.2770$ | $2^{\circ}26' \beta_1 = 5.2424$   | $2^{\circ}40'$                    | $2^{\circ}40'$                    |
| $\chi_2$ | $22^{\circ}42' [- ]^r$           | $20^{\circ}29' [+ ]^r$            | $21^{\circ}35\frac{1}{2}' [- ]^r$ | $21^{\circ}35\frac{1}{2}' [+ ]^r$ |
| $T_2$    | $2^u28'30''$                     | $2^u24'20''$                      | $2^h.4403$                        | $2^h.4403$                        |
| $(X_2)$  | $58^{\circ}34' \beta_2 = 5.0028$ | $-29^{\circ}2' \beta_2 = 5.0878$  | $-30^{\circ}14'$                  | $-30^{\circ}14'$                  |

Hieruit volgt

$$2 \psi_D = -27^{\circ}34',$$

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 9^{\circ}45'\frac{1}{2} \\ [b] \dots \psi = 9^{\circ}56' \\ [c] \dots \psi = 8^{\circ}17' \end{array} \right\} \text{gemiddelde } \psi = 9^{\circ}19';$$

dus  $\gamma_w$  uit geheele periode  $-11^{\circ}.97$ ,

•  $\gamma_w$  uit eerste onderperiode  $-11^{\circ}.76$ ;

en gemiddeld

$$[\text{H. V en VI, 1<sup>e</sup> Periode}] \dots \gamma_w = -11^{\circ}.9.$$

Verder

[H. V en VI]. *Tweede periode.*

|                  | H. V.                          | H. VI.                          | Gemiddelde.             | Verbeterd.           |
|------------------|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------|----------------------|
| (X) <sub>0</sub> | 58°34' β <sub>0</sub> = 5.0028 | — 29°2' β <sub>0</sub> = 5.0878 | — 30°14'                | — 30°14'             |
| χ <sub>1</sub>   | 13°54' [+] <sup>r</sup>        | 11°20'½ [—] <sup>r</sup>        | 12°37' [—] <sup>r</sup> | 12°28'½              |
| T <sub>1</sub>   | 1°3'30"                        | 1°1'15"                         | 1 <sup>h</sup> .0396    | 1 <sup>h</sup> .0351 |
| (X) <sub>1</sub> | 94°50' β <sub>1</sub> = 4.8022 | 1°46' β <sub>1</sub> = 4.9734   | 3°18'                   | 3°5'                 |
| χ <sub>2</sub>   | 23°13' [—] <sup>r</sup>        | 20°8' [+] <sup>r</sup>          | 21°40'½ [+]             | 21°22'½              |
| T <sub>2</sub>   | 2°36'45"                       | 2°26'                           | 2 <sup>h</sup> 5229     | 2 <sup>h</sup> .5247 |
| (X) <sub>2</sub> | 58°38' β <sub>2</sub> = 4.4666 | — 30°2' β <sub>2</sub> = 4.7620 | — 30°42'                | — 30°14'             |

Hieruit volgt

$$2\psi_D = -27°9',$$

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 8°54' \\ [b] \dots \psi = 9°1'½ \\ [c] \dots \psi = 10°53'½ \end{array} \right\} \text{gemiddelde } \psi = 9°36'$$

dus  $\gamma_w$  uit geheele periode = -11°.92,

$\gamma_w$  uit eerste onderperiode = -12°.21,

en gemiddeld

$$[\text{H. V en VI, 2}^\circ \text{ Periode}] \dots \gamma_w = -12^\circ.1.$$

Ter vergelijking met [H. XII] hebben wij twee proeven, [H. X en XI], waarvan wij vooraf het gemiddelde nemen:

|                  | <i>Eerste periode</i> |                   | <i>Tweede periode.</i> |          |
|------------------|-----------------------|-------------------|------------------------|----------|
|                  | [H. X] (17 Dec.)      | [H. XI] (19 Dec.) | [H. X].                | [H. XI]. |
| (X) <sub>0</sub> | 60°46'                | 60°30'            | 57°30'                 | 57°18'   |
| β <sub>0</sub>   | 5.5962                | 5.5362            | 5.0892                 | 5.0392   |
| χ <sub>1</sub>   | 11°30'                | 12°35'            | 13°54'½                | 14 58'½  |
| T <sub>1</sub>   | 1°4 5"                | 1°2'35"           | 1°3'10"                | 1°4'35"  |
| (X) <sub>1</sub> | 91°50'                | 93°50'            | 94°2'                  | 96°42'   |
| β <sub>1</sub>   | 5.3834                | 5.3264            | 4 9056                 | 4.8318   |
| χ <sub>2</sub>   | 23°7'                 | 23°54'            | 26°29'                 | 25°36'   |
| T <sub>2</sub>   | 2°31'55"              | 2°28'45"          | 2°28'5"                | 2°28'40" |
| (X) <sub>2</sub> | 57°30'                | 57°18'            | 53°54'                 | 54°58'   |
| β <sub>2</sub>   | 5.0892                | 5.0392            | 4.6250                 | 4.5523   |

Hiermede komt

[H. X, XI en XII]. *Eerste periode.*

|          | [H. X, XI Gemiddelde].            | H. XII. (19 Dec)                  | Gemiddelde.            | Verbeterd.                 |
|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------|----------------------------|
| $(X)_0$  | $60^{\circ}38' \beta_0 = 5.5662$  | $-30^{\circ}2' \beta_0 = 5.4644$  | $-29^{\circ}42'$       | $-29^{\circ}42'$           |
| $\chi_1$ | $12^{\circ}2\frac{1}{2}' [+ ]^r$  | $12^{\circ}42' [- ]^r$            | $12^{\circ}22' [- ]^r$ | $12^{\circ}3'$             |
| $T_1$    | $1u3'20''$                        | $1u1'35''$                        | $1^h.0410$             | $1^h.0309$                 |
| $(X)_1$  | $92^{\circ}50' \beta_1 = 5.3549$  | $2^{\circ}42' \beta_1 = 5.2838$   | $2^{\circ}46'$         | $2^{\circ}17\frac{1}{2}'$  |
| $\chi_2$ | $23^{\circ}30\frac{1}{2}' [- ]^r$ | $20^{\circ}35' [+ ]^r$            | $22^{\circ}3' [+ ]^r$  | $21^{\circ}22\frac{1}{2}'$ |
| $T_2$    | $2u30'20''$                       | $2u26''$                          | $2^h.4694$             | $2^h.4733$                 |
| $(X)_2$  | $57^{\circ}24' \beta_2 = 5.0642$  | $-28^{\circ}52' \beta_2 = 5.0618$ | $-30^{\circ}44'$       | $-29^{\circ}42'$           |

Hieruit volgt

$$2\psi_D = -27^{\circ}24\frac{1}{2}',$$

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 9^{\circ}19\frac{1}{2}' \\ [b] \dots \psi = 9^{\circ}19\frac{1}{2}' \\ [c] \dots \psi = 9^{\circ}40' \end{array} \right\} \text{gemiddelde } 9^{\circ}26';$$

dus  $\gamma_w$  uit de geheele periode  $-11^{\circ}.96$ , $\gamma_w$  uit de eerste onderperiode  $-12^{\circ}.00$ en dus [H. X, XI en XII, 1<sup>e</sup> Periode]...  $\gamma_w = -12^{\circ}.0$ .

Verder

[H. X, XI en XII]. *Tweede periode.*

|          | [H. X en XI.] Gemidd.             | H. XII.                           | Gemiddelde.            | Verbeterd.                 |
|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------|----------------------------|
| $(X)_0$  | $57^{\circ}24' \beta_0 = 5.0642$  | $-28^{\circ}52' \beta_0 = 5.0618$ | $-30^{\circ}44'$       | $-30^{\circ}44'$           |
| $\chi_1$ | $14^{\circ}26\frac{1}{2}' [+ ]^r$ | $10^{\circ}43\frac{1}{2}' [- ]^r$ | $12^{\circ}35' [- ]^r$ | $12^{\circ}27\frac{1}{2}'$ |
| $T_1$    | $1u3'52''$                        | $1u2'$                            | $1^h.0490$             | $1.0451$                   |
| $(X)_1$  | $95^{\circ}22' \beta_1 = 4.8687$  | $0^{\circ}34' \beta_1 = 4.8902$   | $2^{\circ}58'$         | $2^{\circ}47'$             |
| $\chi_2$ | $26^{\circ}2\frac{1}{2}' [- ]^r$  | $19^{\circ}31' [+ ]^r$            | $22^{\circ}47' [+ ]^r$ | $22^{\circ}31\frac{1}{2}'$ |
| $T_2$    | $2u28'22''$                       | $2u25'20''$                       | $2^h.4475$             | $2^h.4490$                 |
| $(X)_2$  | $54^{\circ}26' \beta_2 = 4.5886$  | $-26^{\circ}42' \beta_2 = 4.6618$ | $-31^{\circ}8'$        | $-30^{\circ}44'$           |

Hieruit volgt

$$2\psi_D = -27^{\circ}57'$$

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 10^{\circ}4' \\ [b] \dots \psi = 10^{\circ}2' \\ [c] \dots \psi = 8^{\circ}57' \end{array} \right\} \text{gemiddelde } 9^{\circ} 1';$$

dus  $\gamma_w$  uit de geheele periode  $-12^{\circ}.39$  $\gamma_w$  uit de eerste onderperiode  $-12^{\circ}.22$ ,en dus [H. X, XI en XII, 2<sup>e</sup> Periode]...  $\gamma_w = -12^{\circ}.3$ .

Slechts twee proeven konden nog worden verricht in de reeks

[K]

Alles als bij [H], maar geen olieweerstand en aan de massa's toegevoegd 1 H G aan elke zijde op den rand van het tafeltje in 't azimuth  $10^0$  ten opzichte van het benedenmes.

*Eerste periode.*

|                  | [K. I] (20 Dec.)                  | [K. II].                         | Gemiddelde.                      | Verbeterd.                  |
|------------------|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| (X) <sub>0</sub> | $-29^{\circ}46' \beta_0 = 5.5074$ | $65^{\circ}20' \beta_0 = 5.4412$ | $-27^{\circ}13'$                 | $-27^{\circ}13'$            |
| $\chi_1$         | $14^{\circ}47' [-]r$              | $8^{\circ}16' [+ ]r$             | $11^{\circ}31' \frac{1}{2} [-]r$ | $10^{\circ}55' \frac{1}{2}$ |
| $T_1$            | $1^u 5' 20''$                     | $53' 40''$                       | $0^h.9917$                       | $0^h.9726$                  |
| (X) <sub>1</sub> | $6^{\circ}58' \beta_1 = 5.2922$   | $90^{\circ}38' \beta_1 = 5.2310$ | $3^{\circ}48'$                   | $2^{\circ}54'$              |
| $\chi_2$         | $21^{\circ}50' [+ ]r$             | $21^{\circ}48' \frac{1}{2} [-]r$ | $21^{\circ}49' [+ ]r$            | $20^{\circ}32' \frac{1}{2}$ |
| $T_2$            | $2^u 22'$                         | $2^u 22' 50''$                   | $2^h.3736$                       | $2^h.3810$                  |
| (X) <sub>2</sub> | $29^{\circ}46' \beta_2 = 5.0456$  | $61^{\circ}24' \beta_2 = 4.9296$ | $-29^{\circ}11'$                 | $-27^{\circ}13'$            |

Hieruit volgt

$$2\psi_D = -24^{\circ}19',$$

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 9^{\circ}37' \\ [b] \dots \psi = 9^{\circ}37' \\ [c] \dots \psi = 9^{\circ}53' \end{array} \right\} \text{gemiddelde } \psi = 9^{\circ}42' \frac{1}{2};$$

en dus  $\gamma_w$  uit de geheele periode  $-12^{\circ}.78$ ,

$\gamma$  uit de eerste onderperiode  $-12^{\circ}.82$ ,

en dus [K. I en II, 1<sup>e</sup> Periode]...  $\gamma_w = -12^{\circ}.8$ .

*Tweede periode.*

|                  | [K. I].                           | [K. II].                          | Gemiddelde.                      | Verbeterd.                  |
|------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| (X) <sub>0</sub> | $-29^{\circ}46' \beta_0 = 5.0456$ | $61^{\circ}24' \beta_0 = 4.9296$  | $-29^{\circ}11'$                 | $-29^{\circ}11'$            |
| $\chi_1$         | $14^{\circ}06' [-]r$              | $10^{\circ}19' \frac{1}{2} [+ ]r$ | $12^{\circ}12' \frac{1}{2} [-]r$ | $11^{\circ}59'$             |
| $T_1$            | $1^u 3' 10''$                     | $56' 5''$                         | $0^h.9937$                       | $0.9885$                    |
| (X) <sub>1</sub> | $5^{\circ}14' \beta_1 = 4.8510$   | $92^{\circ}14' \beta_1 = 4.7518$  | $3^{\circ}44'$                   | $3^{\circ}25' \frac{1}{2}$  |
| $\chi_2$         | $19^{\circ}34' [+ ]r$             | $23^{\circ}50' [-]r$              | $21^{\circ}42' [+ ]r$            | $21^{\circ}16' \frac{1}{2}$ |
| $T_2$            | $2^u 20' 15''$                    | $2^u 22' 40''$                    | $2^h.3576$                       | $2^h.3627$                  |
| (X) <sub>2</sub> | $-28^{\circ}46' \beta_2 = 4.6112$ | $58^{\circ}42' \beta_2 = 4.4574$  | $-30^{\circ}2'$                  | $-29^{\circ}11'$            |

Hieruit volgt

$$2\psi_D = -25^{\circ}45' \frac{1}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 9^{\circ}17' \frac{1}{2} \\ [b] \dots \psi = 9^{\circ}26' \\ [c] \dots \psi = 9^{\circ}33' \end{array} \right\} \text{gemiddelde } \psi = 9^{\circ}25' \frac{1}{2},$$

en dus  $\gamma_w$  uit de geheele periode  $12^0.50$ ,  
 $\gamma_w$  uit de eerste onderperiode  $12^0.56$ ;  
 zoodat [K. I en II, 2<sup>e</sup> Periode]...  $\gamma_w = -12^0.5$ .

Wij vormen nu het gemiddelde uit deze proeven van de [H]reeks, waarbij tegenover [H. X] en [H. XI] beide [H. XII] gesteld moet worden.

## GEMIDDELDE UIT [H].

Zeevingen om de  $\alpha_1$ -as.

|                             | $(X)_0$ | $\beta_0$ | $\alpha_1$           | $T_1$   | $(X)_1$             | $\beta_1$ | $\alpha_2$           | $T_2$    | $(X)_2$ | $\beta_2$ |
|-----------------------------|---------|-----------|----------------------|---------|---------------------|-----------|----------------------|----------|---------|-----------|
| [H. III]                    | -29°2'  | 5.3168    | 11°49'               | 1°3'7"  | 2°30'               | 5.1386    | 17°44' $\frac{1}{2}$ | 2°27'22" | -25°26' | 4.9006    |
| [H. VI. 1 <sup>e</sup> P.]  | -30°54' | 5.4022    | 11°57'               | 1°2'45" | 2°26'               | 5.2424    | 20°29'               | 2°24'20" | -29°2'  | 5.0878    |
| [H. XII. 1 <sup>e</sup> P.] | -30°2'  | 5.4644    | 12°42'               | 1°1'35" | 2°42'               | 5.2838    | 20°35'               | 2°26'    | -28°52' | 5.0618    |
| [H. XII. 1 <sup>e</sup> P.] | -30°2'  | 5.4644    | 12°42'               | 1°1'35" | 2°42'               | 5.2838    | 20°35'               | 2°26'    | -28°52' | 5.0618    |
| [H. VI. 2 <sup>e</sup> P.]  | -29°2'  | 5.0878    | 11°20' $\frac{1}{2}$ | 1°1'15" | 1°46'               | 4.9734    | 20°8'                | 2°26'    | -30°2'  | 4.7620    |
| [H. XII. 2 <sup>e</sup> P.] | -28°52' | 5.0618    | 10°43' $\frac{1}{2}$ | 1°2'    | 0°34'               | 4.8902    | 19°31'               | 2°25'20" | -26°42' | 4.6618    |
| [H. XII. 2 <sup>e</sup> P.] | -28°52' | 5.0618    | 10°43' $\frac{1}{2}$ | 1°2'    | 0°34'               | 4.8902    | 19°31'               | 2°25'20" | -26°42' | 4.6618    |
| Gemiddelde                  | -29°32' | 5.2656    | 11°42' $\frac{1}{2}$ | 1°2'2"  | 1°53' $\frac{1}{2}$ | 5.1003    | 19°47' $\frac{1}{2}$ | 2°25'46" | -27°57' | 4.8854    |

Zeevingen om de  $\gamma_1$ -as.

|                            |        |        |                      |         |        |        |        |          |        |        |
|----------------------------|--------|--------|----------------------|---------|--------|--------|--------|----------|--------|--------|
| [H. IV]                    | 61°38' | 5.5074 | 12°1'                | 0°59'5" | 93°50' | 5.2962 | 22°31' | 2°20'25" | 60°22' | 5.0452 |
| [H. V. 1 <sup>e</sup> P.]  | 60°26' | 5.5022 | 11°43'               | 1°2'55" | 92°54' | 5.2770 | 22°42' | 2°28'30" | 58°34' | 5.0028 |
| [H. X. 1 <sup>e</sup> P.]  | 60°46' | 5.5922 | 11°30'               | 1°4'5"  | 91°50' | 5.3834 | 23°7'  | 2°31'55" | 57°30' | 5.0892 |
| [H. XI. 1 <sup>e</sup> P.] | 60°30' | 5.5362 | 12°35'               | 1°2'35" | 93°50' | 5.3264 | 23°54' | 2°28'45" | 57°18' | 5.0392 |
| [H. V. 2 <sup>e</sup> P.]  | 58°34' | 5.0028 | 13°54'               | 1°3'30" | 94°50' | 4.8022 | 23°13' | 2°30'45" | 58°38' | 4.4666 |
| [H. X. 2 <sup>e</sup> P.]  | 57°30' | 5.0592 | 13°54' $\frac{1}{2}$ | 1°3'10" | 94°2'  | 4.9056 | 23°29' | 2°28'5"  | 53°54' | 4.6250 |
| [H. XI. 2 <sup>e</sup> P.] | 57°18' | 5.0392 | 14°58' $\frac{1}{2}$ | 1°4'35" | 96°42' | 4.8318 | 25°36' | 2°28'40" | 54°58' | 4.5523 |
| Gemiddelde                 | 59°32' | 5.3253 | 12°57'               | 1°2'51" | 94°0'  | 5.1175 | 23°56' | 2°29'1"  | 57°19' | 4.8315 |

Wij vinden dus

[H. Gemiddelde].

|                   | Zweving om $x_i$ -as.                 | Zweving om $y_i$ -as.            | Gemiddelde.                | Verbeterd.                  |
|-------------------|---------------------------------------|----------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $(X_0)$           | $-29^{\circ}32' \beta_0 = 5.2656$     | $59^{\circ}32' \beta_0 = 5.3253$ | $-30^{\circ}0'$            | $-30^{\circ}0'$             |
| $\frac{X_1}{T_1}$ | $11_042' \frac{1}{2} [-]^r$           | $12^{\circ}57' [+]^r$            | $12^{\circ}20' [-]^r$      | $12^{\circ}14'$             |
| $\frac{X_2}{T_2}$ | $1^{\circ}2' 2''$                     | $1^{\circ}2' 51''$               | $1^{\circ}2' 27''$         | $1^{\circ}0375$             |
| $(X_1)_1$         | $1_053' \frac{1}{2} \beta_1 = 5.1003$ | $94^{\circ}0' \beta_1 = 5.1175$  | $2^{\circ}56' \frac{1}{2}$ | $2^{\circ}47' \frac{1}{2}$  |
| $\frac{X_2}{T_2}$ | $19^{\circ}47' \frac{1}{2} [+]^r$     | $23^{\circ}56' [-]^r$            | $21^{\circ}52' [+]^r$      | $21^{\circ}39' \frac{1}{2}$ |
| $\frac{X_3}{T_3}$ | $2^{\circ}25' 46''$                   | $2^{\circ}29' 1''$               | $2^{\circ}27' 23.5''$      | $2^{\circ}4.4576$           |
| $(X_2)_2$         | $-27^{\circ}57' \beta_2 = 4.8854$     | $57^{\circ}19' \beta_2 = 4.8315$ | $-30^{\circ}19'$           | $-30^{\circ}0'$             |

waaruit volgt

$$2\psi_{\text{H}} = -27^{\circ}12' \frac{1}{2},$$

en verder

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 9^{\circ}25' \frac{1}{2} \\ \left. \begin{array}{l} [b_1] \dots \psi = 9^{\circ}33' \\ [b_2] \dots \psi = 9^{\circ}21' \end{array} \right\} \dots [b] \dots \psi = 9^{\circ}27' \\ \left. \begin{array}{l} [c_1] \dots \psi = 9^{\circ}15' \\ [c_2] \dots \psi = 9^{\circ}13' \end{array} \right\} \dots [c] \dots \psi = 9^{\circ}14' \end{array} \right\} \text{gemiddeld } \psi = 9^{\circ}22'.$$

Dus

$$\gamma_{\text{w}} \text{ uit geheele periode } -11^{\circ}.95,$$

$$\gamma_{\text{w}} \text{ uit eerste onderperiode } -11^{\circ}.92;$$

$$[\text{H, gemiddelde}] \dots \gamma_{\text{w}} = -11^{\circ}.93.$$

### § 3. Nauwkeurigheid der proeven.

Vormen wij eindelijk het gemiddelde uit al de proeven op deze wijze met den toestel met aagaatmessen verricht (waarbij de waarden onder [H gemiddelde] gevonden met het gewicht 7, die onder G met het gewicht 2 en elke der beide perioden van [K] met het gewicht 1 genomen moeten worden) zoo vinden wij

$$\begin{array}{llll} [a] & [b] & [c] & \gamma_{\text{w}} \text{ uit geheele p. } \gamma_{\text{w}} \text{ uit eerste onderp.} \\ \psi = 9^{\circ}14', \psi = 9^{\circ}19', \psi = 9^{\circ}15', & & & 12.04, \quad 12.04. \end{array}$$

De uitstekende overeenstemming van dit gemiddelde met de theorie:  $\gamma_{\text{w}} = -12^{\circ}.03$ , ook in de laatste decimaal is aan toeval toe te schrijven; want de nauwkeurigheid van de waarnemingen bij mijne hulpmiddelen kon slechts de voorlaatste decimaal met zekerheid leveren.

Bij de verschillende proeven, die wij op deze wijze samengevoegd hebben, waren de omstandigheden nagenoeg dezelfde; zoodat zij vrij wel als herhalingen van een zelfde proef mogen worden opgevat.

Door het gemiddelde te nemen doen wij niets anders dan de toevallige fouten te elimineeren. Dit moet in 't oog gehouden worden bij de vergelijking van de nauwkeurigheid van mijne uitkomsten met die door VAN DER WILLIGEN met den gewonen slinger van FOUCAULT verkregen. Inmers het nemen van gemiddelden uit de draaiingssnelheden in verschillend azimuth, die regelmatige standvastige afwijkingen vertoonen, krijgt eerst beteekenis, wanneer men ze als in III § 2 van 't 2<sup>e</sup> Stuk beschouwt, d. i. als bijzonder geval van de door mij behandelde verschijnselen opvat. Terwijl de gemiddelde afwijking van de theorie bij mijne afzonderlijke proeven ongeveer  $0^{\circ}.3$  bedraagt, wordt zoodra men over eenige proeven het gemiddelde neemt eene nauwkeurigheid van  $0^{\circ}.1$  verkregen. En het komt mij hoogst waarschijnlijk voor, dat bij een toestel opgesteld op een grondslag, zooals men die in de nieuwere laboratoria vindt en beter dan mij ten dienste stond, reeds door ééne proef deze nauwkeurigheid bereikt kan worden.

Nu zagen wij op p. 207 en 208, dat uit de proef *i* VAN DER WILLIGEN, die gedurende 11 uren werd voortgezet, op de breedte van Haarlem gevonden werd  $-12^{\circ}.88$ , en uit de gedurende 4 uren voortgezette proef *d*,  $-11^{\circ}.24$ ; terwijl de theorie  $-11^{\circ}.91$  vordert. De grootste afwijking bij mijne afzonderlijke proeven was [H. III en IV]  $0^{\circ}.8$ .

De gemiddelden uit proefreeksen van VAN DER WILLIGEN die zich over 60 uren uitstrekken, nl.  $-12^{\circ}.03$ ,  $-12^{\circ}.11$ ,  $-11^{\circ}.97$ ,  $11,81$  (zie pag. 208) zijn slechts weinig nauwkeuriger dan de uitkomsten bij mijne meeste afzonderlijke slechts 5 uren durende proeven, en het gemiddelde van al de proeven van VAN DER WILLIGEN (240 uren) staat in nauwkeurigheid achter bij het gemiddelde van mijne waarnemingen uit de [G], [H] en [K] reeks (samen ongeveer 45 uren).

Ik meen dus met deze proeven minstens het hoofddoel bereikt te hebben, dat ik mij voorstelde, nl. aan te toonen, dat de door mij behandelde verschijnselen met dezelfde nauwkeurigheid de draaiing der aarde kunnen bewijzen als de slingerproef van FOUCAULT.

Ter beoordeeling van den invloed der amplituden op de wrijving ligt het voor de hand de proeven, die twee perioden omvatten tot een gemiddelde samen te vatten; daarbij moet [H. XII] eenmaal tegenover [H. X] en eenmaal tegenover [H. XI] in rekening worden gebracht. Dit geeft

|           | Gemiddelde uit<br>H. VI, XII, XII en KI. | Gemiddelde uit<br>H. V, X, XI en K. II. | Gemiddelde                  |
|-----------|------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------|
| $X_0$     | $-30^{\circ}11'$                         | $90^{\circ}-28^{\circ}14'\frac{1}{2}$   | $-29^{\circ}12'\frac{1}{2}$ |
| $\beta_0$ | 5.4596                                   | 5.5197                                  | 5.4896                      |
| $X_1$     | $3^{\circ}42'$                           | $2^{\circ}18'$                          | $3^{\circ}$                 |
| $\beta_1$ | 5.2756                                   | 5.3045                                  | 5.2900                      |
| $T_1$     | $1^h.0469$                               | $1^h.0135$                              | $1^h.0302$                  |
| $X_2$     | $-29^{\circ}8'$                          | $90^{\circ}-31^{\circ}18'\frac{1}{2}$   | $-30^{\circ}13'$            |
| $\beta_2$ | 5.0642                                   | 5.0152                                  | 5.0397                      |
| $T_2$     | $2^h.4097$                               | $2^h.4667$                              | $2^h.4382$                  |
| $X_3$     | $2^{\circ}2'$                            | $4^{\circ}27'$                          | $3^{\circ}14'\frac{1}{2}$   |
| $\beta_3$ | 4.9012                                   | 4.8228                                  | 4.8620                      |
| $T_3-T_2$ | $1^h.0350$                               | $1^h.0305$                              | $1^h.0327$                  |
| $X_4$     | $-28^{\circ}3'$                          | $90^{\circ}-33^{\circ}27'$              | $-30^{\circ}45'$            |
| $\beta_4$ | 4.6742                                   | 4.5253                                  | 4.5997                      |
| $T_4-T_2$ | $2^h.4033$                               | $2^h.4839$                              | $2^h.4438$                  |

Hieruit werd in het 2<sup>e</sup> Stuk II § 4 afgeleid, dat overeenkomstig met de proeven in II § 4 van dit Gedeelte in de wrijving een term afhankelijk van de tweede (of hoogere?) macht der snelheid voorkomt, die een afnemend decrement en eene negatieve waarde van  $X_2 - X_0$  ten gevolge heeft, maar dat tevens enkele verschijnselen op de aanwezigheid van eene wrijving onafhankelijk van de snelheid wijzen.

[G]

§ 4. *Verklaring der geëlimineerde afwijkingen.*

De samenvoeging van telkens twee proeven had ten doel de storingen ten gevolge van de eindige amplituden en van de wrijving recht evenredig aan de snelheid te elimineeren. Wij zullen dus nog aantoonen, dat de geëlimineerde afwijkingen werkelijk daaraan toegeschreven mogen worden. Om twee redenen kan men van de overeenstemming van de waargenomen afwijkingen tusschen elk paar van proeven onderling en de volgens II § 1 van het 2<sup>e</sup> Stuk berekende, geene hooge verwachting koesteren. 1. Omdat zij in vele gevallen van dezelfde orde zijn als de toevallige fouten bij mijne proeven. 2. Omdat zij vermengd zijn met de afwijkingen ten gevolge van de wrijving niet recht evenredig aan de snelheid, wier berekening vrij omslachtig zoude zijn. Wij zullen ons dus bepalen tot de afwijking, die in deze beide opzichten in de gunstigste omstandigheden voor de verklaring verkeert, nl. de afwijking

$$X'_2 - X''_2 + X'_0 - X''_0,$$

waar ' op de zweving om de  $x_i$ - en '' op de zweving om de  $y_i$ -as betrekking heeft, en die de som is van de inkrimping van het gebied bij zwevingen om de  $x_i$ -as en van de uitbreiding van het gebied bij de overeenkomstige zweving om de  $y_i$ -as. De berekening wordt zeer eenvoudig doordat de afwijkingen ten gevolge van de eindige amplituden bij mijne proeven slechts weinige minuten bedroegen en dus voor ons doel verwaarloosd mogen worden. Noemt men  $F'_0$  de gemiddelde afname van den Neperiaanschen logarithmus van het vierkant der amplitude per seconde bij zwevingen om de  $x_i$ -as en  $F''_0$  dezelfde grootte voor zwevingen om de  $y_i$ -as; zoo is volgens (136) van het 2<sup>e</sup> Stuk

$$F'_0 - F''_0 = (A_D - B_D) \text{Cos } \varepsilon \text{Cos } \psi' \text{Cos } 2\psi_D,$$

$\varepsilon$  nemende voor de gemiddelde zweving om de  $x_i$ -as; verder volgens II § 1 en § 3 van het 2<sup>e</sup> Stuk

$$X'_2 - X'_0 - X''_2 + X''_0 = 2 \left( \frac{Tg \psi'}{\text{Sin } \varepsilon} \text{Cotg } 2\delta + \text{Sin } 2\delta \text{Cos } \varepsilon \right) \frac{\Delta \varepsilon^2}{2 \text{Cos } 2X'_0},$$

$$\text{waar } \Delta \varepsilon_2 = \frac{A_D - B_D}{2} \text{Cos } 2\psi_D \text{Cos } \psi' \text{Sin } \varepsilon \cdot T_2,$$

en alle grootheden weder op de „gemiddelde” zweving om de  $x_i$ -as betrekking hebben. Daar de  $\beta$ , welke wij bij de proeven opgaven, Briggiaansche en de  $F_0$  Neperiaansche logarithmen zijn, vindt men  $F_0$  door

$$F_0 = 2.3025 \frac{\beta_2 - \beta_0}{T_2}.$$

Nu vinden wij

|                          | $\log F'_0 - F''_0$ | $\log \Delta \varepsilon_2$ | $X'_2 - X'_0 - X''_2 + X''_0$ |                 |
|--------------------------|---------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------|
|                          |                     |                             | berekend                      | waargenomen     |
| [A]                      | $\bar{5}.8280$      | $\bar{9}.2743$              | $12^\circ 10'$                | $12^\circ 2'$   |
| [E]                      | $\bar{5}.2355$      | $\bar{9}.1373$              | $8^\circ 21'$                 | $20^\circ 38'$  |
| [F]                      | $5'.5647$           | $8'.8180$                   | $-4^\circ 1'$                 | $-10^\circ 54'$ |
| [G]                      | $5'.5403$           | $9'.0209$                   | $-6^\circ 14'$                | $-6^\circ 56'$  |
| [K, 1 <sup>e</sup> Per.] | $\bar{5}.1004$      | $\bar{8}'.5565$             | $2^\circ 10'$                 | $3^\circ 56'$   |
| [K, 2 <sup>e</sup> Per.] | $\bar{4}'.9085$     | $\bar{8}'.3654$             | $1^\circ 23'$                 | $3^\circ 42'$   |
| [H, Gem.]                | $\bar{5}.4330$      | $\bar{8}'.9040$             | $4^\circ 48'$                 | $3^\circ 48'$   |

De overeenstemming der berekende en waargenomen grootheden, ofschoon voldoende om de gegeven verklaring der regelmatige afwijkingen te steunen, is niet van dien aard, dat zij een verdere vergelijking van de afwijkingen met de theorie vruchtbaar doet schijnen.

### § 5. De abnormale onderperiode gaat vooraf.

In de proeven [H. III en IV], waarvan wij alleen de eerste periode mededeelden, werd nog eene derde onderperiode gevolgd; zij

laat zich met de tweede onderperiode samenvatten tot eene geheele periode, waarin de abnormale onderperiode voorafgaat.

[H. III en IV, *Middenperiode*].

|          | H. III.                            | H. IV.                           | Gemiddelde.                        |
|----------|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| $(X)_0$  | $2^{\circ}30' \beta_0 = 5.1386$    | $93^{\circ}50' \beta_0 = 5.2962$ | $3^{\circ}10'$                     |
| $\chi_1$ | $17^{\circ}44' \frac{1}{2} [+ ]^r$ | $22^{\circ}31' [- ]^r$           | $20^{\circ}8' [+ ]^r$              |
| $T_1$    | 1.4042                             | 1.3566                           | 1.3799                             |
| $(X)_1$  | $-25^{\circ}26' \beta_1 = 4.9006$  | $60^{\circ}22' \beta_1 = 5.0452$ | $-27^{\circ}32'$                   |
| $\chi_2$ | $7^{\circ}59' [- ]^r$              | $13^{\circ}58' [+ ]^r$           | $10^{\circ}58' \frac{1}{2} [- ]^r$ |
| $T_2$    | 2.4430                             | 2.3680                           | 2.4055                             |
| $(X)_2$  | $-1^{\circ}4' \beta_2 = 4.7426$    | $5^{\circ}26'$                   | $2^{\circ}11'$                     |

Wij vatten deze proef terstond samen met de twee aan twee samengevoegde middenperioden (2<sup>e</sup> en 3<sup>e</sup> onderperiode), die wij aan de medegedeelde proeven over twee perioden kunnen ontleenen:

[H en K, *Middenperioden*].

H. III en IV. H. V en VI. H. X, XI en XII. K. I en II. Gemiddelde.

|          |                             |                             |                  |                  |                             |                  |
|----------|-----------------------------|-----------------------------|------------------|------------------|-----------------------------|------------------|
| $(X)_0$  | $3^{\circ}10'$              | $2^{\circ}40'$              | $2^{\circ}46'$   | $2^{\circ}46'$   | $3^{\circ}48'$              | $3^{\circ}2'$    |
| $\chi_1$ | $20^{\circ}8'$              | $21^{\circ}35' \frac{1}{2}$ | $22^{\circ}3'$   | $22^{\circ}3'$   | $21^{\circ}49'$             | $21^{\circ}32'$  |
| $T_1$    | 1.3799                      | 1.3931                      | 1.4285           | 1.4285           | 1.3819                      | 1.4024           |
| $(X)_1$  | $-27^{\circ}32'$            | $-30^{\circ}14'$            | $-30^{\circ}44'$ | $-30^{\circ}44'$ | $-29^{\circ}11'$            | $-29^{\circ}41'$ |
| $\chi_2$ | $10^{\circ}58' \frac{1}{2}$ | $12^{\circ}37'$             | $12^{\circ}35'$  | $12^{\circ}35'$  | $12^{\circ}12' \frac{1}{2}$ | $12^{\circ}12'$  |
| $T_2$    | 2.4055                      | 2.4327                      | 2.4775           | 2.4775           | 2.3755                      | 2.4337           |
| $(X)_2$  | $2^{\circ}11'$              | $3^{\circ}18'$              | $2^{\circ}58'$   | $2^{\circ}58'$   | $3^{\circ}44'$              | $3^{\circ}2'$    |

Hieruit volgt

$$\left. \begin{array}{l} [a] \dots \psi = 9^{\circ}20'. \\ [b_1] \dots \psi = 9^{\circ}18'. \\ [b_2] \dots \psi = 9^{\circ}31'. \\ [c_1] \dots \psi = 9^{\circ}2'. \\ [c_2] \dots \psi = 8^{\circ}36' \frac{1}{2}. \end{array} \right\} \dots \left. \begin{array}{l} [b] \dots \psi = 9^{\circ}22'. \\ [c] \dots \psi = 8^{\circ}49'. \end{array} \right\} \text{gemiddeld } \psi = 9^{\circ}10';$$

dus  $\gamma_w$  uit de geheele periode  $-11^{\circ}.81$ ,

$\gamma_w$  uit de eerste onderperiode  $-11^{\circ}.84$ ;

zoodat [H en K, *Middenperioden*]  $\dots \gamma_w = -11^{\circ}.8$ .

## § 6. WAARNEMINGEN VAN DE KLASSE F.

Zeer opmerkelijk als sierlijk bewijs voor de aswenteling der aarde, maar minder geschikt voor de berekening, wanneer de wrijving en de eindige amplituden aanmerkelijke storingen ten gevolge hebben, is het bijzondere geval van de klasse B. II, waarbij de slingeringen oorspronkelijk in een der symmetrieassen vallen.

Bij ongelijke wrijving aan de beide messen gaan de verschijnselen bij zweving om één der symmetrieassen in de klasse C. I over

(vergel. 2<sup>e</sup> Stuk II § 2);  $T_2$  en  $T_1$  bestaan voor deze as fiet, en men kan dus op de gewone wijze de waarnemingen van zwevingen om de beide symmetrieassen niet tot een gemiddelde samenvoegen.

Toch is het dan mogelijk de waarde van  $\psi$  bevrijd van de storing door eindige amplituden en wrijving recht evenredig aan de snelheid te vinden; men moet daartoe aan  $\alpha_2$  in het geval, dat de slingering niet weder rechtlijnig worden, eene negatieve waarde toekennen en er den negatieven *minimum* verhoudingshoek der ellipsen voor nemen, om vervolgens als vroeger de berekeningswijze [a] toe te kunnen passen. Voor eene strenge berekening moet men uit de storingsformulen de verbetering, die in  $T_2$ , waargenomen in de zweving om de andere symmetrieas, moet worden aangebracht, berekenen. In eerste benadering zal men echter die verbetering mogen verwaarloozen of voor  $T_1$  de uitkomst van andere van de storingen bevrijde proeven met denzelfden toestel mogen nemen.

Voorbeelden voor gestoorde verschijnselen van deze klasse leveren de proeven:

|            | [H. VII] (16 Dec.)               | [H. VIII].                        | Gemiddelde.                       |
|------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $(X)_0$    | $-12^{\circ}6' \beta_0 = 6.5858$ | $-12^{\circ}42' \beta_0 = 5.5022$ | $-12^{\circ}24' \beta_0 = 5.5440$ |
| $\alpha_1$ | $8^{\circ}48\frac{1}{2}' [+]'$   | $10^{\circ}32' [+]'$              | $9^{\circ}40' [+]'$               |
| $T_1$      | $1^{\text{u}}53'15''$            | $1^{\text{u}}51'10''$             | $1^{\text{u}}52'12\frac{1}{2}''$  |
| $(X)_1$    | $-17^{\circ}30'$                 | $-18^{\circ}46'$                  | $-18^{\circ}8'$                   |
| $\alpha_2$ | $[2^{\circ}25'] [-]'$            | $2^{\circ}11' [-]'$               | $2^{\circ}18' [-]'$               |
| $T_2$      | $2^{\text{u}}29'35''$            | $2^{\text{u}}32'5''$              | $2^{\text{u}}30'50''$             |
| $(X)_2$    | $-8^{\circ}26' \beta_2 = 5.1544$ | $-10^{\circ}34' \beta_2 = 5.1022$ | $-9^{\circ}30' \beta_2 = 5.1283$  |

en tevens van de

*Verandering van Klasse.*

|            | [H. IX] (16 Dec.)                                 |
|------------|---------------------------------------------------|
| $(X)_0$    | $74^{\circ}46' \beta_0 = 5.4646$                  |
| $\alpha_1$ | $8^{\circ}8' [-]'$                                |
| $T_1$      | } bestaat niet, de ellipsen blijven steeds $[-]'$ |
| $(X)_1$    |                                                   |
| $\alpha_2$ | $2^{\circ}20' [-]'$ ; Minimum van $\alpha$        |
| $T_2$      | } de slingeringen worden niet weder recht-        |
| $(X)_2$    |                                                   |

<sup>1)</sup> Deze waarde werd door berekening uit H. VIII aangevuld.

Brengen wij  $\alpha_2$  uit [H. IX] als negatief in rekening; zoo komt

|            | [H. VII en VIII].   | H. IX.             | Gemiddelde.      |
|------------|---------------------|--------------------|------------------|
| $(X)_0$    | $-12^{\circ}24'$    | $74^{\circ}46'$    | $-13^{\circ}50'$ |
| $\alpha_1$ | $9^{\circ}40' [+]'$ | $8^{\circ}8' [-]'$ | $8^{\circ}54'$   |
| $\alpha$   | $2^{\circ}18' [-]'$ | $-2^{\circ}20'$    | $-1'$            |
| $T_2$      | $2^{\circ}30'50''$  |                    |                  |

terwijl uit de tweede onderperiode van H. VII en VIII gevonden wordt

$$\psi_D = -13^{\circ}49'.$$

Wij zien dus, dat slingeringen, voor welke de tweede onderperiode juist ophoudt te bestaan (wij verwaarloozen  $\alpha_2 = 1'$ ) inderdaad in de symmetrieas vallen. Uit de maximumellips  $\alpha_1 = \psi'$  volgt

$$\psi' = 8^{\circ}54';$$

terwijl wij bij de [H]reeks gemiddeld  $9^{\circ}22'$  vonden; verder met  $T_2$

$$[\text{H. VII, VIII en IX}] \dots \gamma_w = -11^{\circ}.1.$$

Voegt men [H. VIII en IX] alleen samen en ontleent men  $T_2$  aan [H Gemiddelde], zoo komt

$$\psi' = 9^{\circ}24'30'' \dots \gamma_w = -12^{\circ}.0;$$

inderdaad werd [H. VIII] onder gunstiger omstandigheden verricht dan [H. VII].

Opmerkelijk echter is het, dat de inkrimping van het gebied plaats vindt voor ellipsen wier groote as in de nabijheid van de as van het grootste decrement valt [H. IX], terwijl de theorie bij  $\psi_D = 0$  en alleen lettende op de wrijving rechtevenredig aan de snelheid vordert dat dit de as van het kleinste decrement is. In de proefreeks F waar dit verschil der decrementen ten gevolge van de wrijving rechtevenredig aan de snelheid grooter was, vindt men ook in dit opzicht de theorie bevestigd:

F. VII (24 Juli).

|          |                                                                  |
|----------|------------------------------------------------------------------|
| $X_0$    | 109 <sup>o</sup> 48' (as kleinste decrement 95 <sup>o</sup> 7'), |
| $\alpha$ | [-]' en worden niet weder rechtlijnig,                           |
| $\alpha$ | minimum na ongeveer 2 uur,                                       |
|          | vervolgens toenemende $\alpha$ [-]'                              |

*Keerpunten.*

In de proeven [H. VIII en IX] trad het verschijnsel der keerpunten, die in elke abnormale onderperiode (zie bijv. ook [A. I en II])

waargenomen werden, het duidelijkst op. Bij [H. VIII] werd het eerste keerpunt waargenomen in 't azimuth  $-9^{\circ}22'$ , terwijl het oorspronkelijk azimuth  $-12^{\circ}42'$  was. Bij [H. IX] was het eerste keerpunt bij  $78^{\circ}50'$ , terwijl het oorspronkelijk azimuth  $74^{\circ}46'$  was, het tweede keerpunt bij  $72^{\circ}6'$ . Neemt men het gemiddelde uit de beide eerste, zoo vindt men als oorspronkelijk azimuth  $-13^{\circ}58'$  en als azimuth van het keerpunt  $-10^{\circ}16'$ . Volgens (135) van 't 1<sup>e</sup> Stuk heeft men voor 't geval, dat de slingeren oorspronkelijk in eene symmetrieas vallen  $\pm \text{Sin } 2 X_m = \text{Tg } \psi'$ ; hieruit zou volgen  $X_m = 4^{\circ}44'$  ontleent men  $\psi_D$  aan de tweede onderperiode van H. VIII; zoodat  $\psi_D = -14^{\circ}40'$ , zoo komt voor het waargenomen geval, waar de slingeren oorspronkelijk niet juist in de symmetrieas vielen volgens (135) voor

$$X_m = 4^{\circ}47',$$

en dus voor

$$(X_m) = -9^{\circ}53' \text{ (theorie),}$$

hetgeen inderdaad weinig afwijkt van

$$(X_m) = -10^{\circ}16' \text{ (waarneming).}$$

#### WAARNEMINGEN VAN DE KLASSE B. I.

##### § 7.

Een voorbeeld van verschijnselen van de klasse D, die de overgang van B. II tot B. I vormt, levert de proef [G. V]. De waarde van  $\psi$  in de proefreeks [G] was  $8^{\circ}45'\frac{1}{2}$  en in [G. I, III en II] werden zwevingen van de klasse B. II waargenomen. De gebruikte oculairmicrometer was niet geschikt om de afwijking van ellipsen van den cirkelvorm nauwkeurig te bepalen, waarop het voor de berekening van deze proef voornamelijk aan zoude komen. Duidelijk blijkt echter, dat bij deze keuze van het aanvankelijk azimuth de verschijnselen nagenoeg tot de klasse D behooren.

[G. V] (29 Octob.)

$$(X)_0 \ 54^{\circ}18' \ \beta_0 = 5.1996$$

$$\alpha_1 \ 36^{\circ}28' \ [+]' \ \text{azimuth } 93^{\circ} \ \text{ongeveer}$$

$$(X)_1 \ 135^{\circ}42' \ \beta_1 = 5.0406$$

$$T_1 \ 1^{\circ}9'40''$$

$$\alpha_2 \ 43^{\circ}40' \ [-]' \ \text{het azimuth der groote as was moeilijk te bepalen} \\ \text{(140}^{\circ}\text{?); eigenlijk niet meer zeker dan dat de} \\ \text{slingeringen nagenoeg cirkelvormig zijn.}$$

$$T_2 \ 2^{\circ}21'$$

$$(X)_2 \ 52^{\circ}34' \ [\beta_2 = 4.8680].$$

Men vindt uit  $-\frac{(X)_0 + (X)_2}{4} + \frac{(X)_1}{2}$  voor  $2X_0$  ongeveer  $82^{\circ}16'$ ; de theoretische waarde van  $2X_0^D$  (zie 1<sup>e</sup> Stuk n<sup>o</sup>. 29 zou voor dit geval  $81^{\circ}8'$  zijn. Eindelijk zou de onderstelling, dat de zweving tot de klasse D behoort vorderen  $\alpha_1 = 36^{\circ}14\frac{1}{2}'$ , hetgeen zeer goed overeenkomt met de gevonden waarde.

### § 8. *Over de slingerproef van FOUCAULT.*

De slingerproeven, die na de schitterende ontdekking van FOUCAULT in grooten getale overal, volgens zijne methode, werden herhaald, leverden slechts dan eenigermate bevredigende uitkomsten, wanneer men zeer lange slingers gebruikte. Zulk een slinger werd op pag. 206 beschreven. Om de draaiing van het slingervlak te bepalen bevestigde men gewoonlijk onder aan den slingerbol eene stift en bepaalde over welken diameter van een horizontaal onmiddelijk er onder geplaatsten cirkel deze stift bij het begin en het einde van de proef zich bewoog. De grootere lengte van den slinger had dan het dubbele voordeel, dat men eenerzijds den diameter van dien cirkel grooter kon nemen, en dus zijn richting nauwkeuriger bepalen kon, anderzijds de proef langer voort kon zetten zonder dat de afname den amplituden de nauwkeurigheid van die bepaling merkbaar deed verminderen.

In het tentoonstellingsgebouw voor 1878 werd te Parijs in een afzonderlijke ruimte een metalen stuk van 300 KG. aan een ijzerdraad van 65 tot 70 M. lengte opgehangen. Deze grootsche inrichting van de proef was zeker wel geschikt om de opmerkzaamheid van het groote publiek op dit schoon bewijs voor de aswenteling der aarde te vestigen. Maar ook uit een zuiver wetenschappelijk oogpunt levert de slingerproef van FOUCAULT nog stof tot beschouwingen.

PORRO <sup>1)</sup> heeft eene andere methode ter bepaling van de draaiing van het slingervlak voorgeslagen, die van de lengte van den slinger onafhankelijk is. Maar hij schijnt niet tot praktische resultaten gekomen te zijn. Van meer invloed dan de waarnemingsfouten in de bepaling van de draaiing is de afwijking van den toestel van de eenvoudige onderstellingen, die aan de afleiding van de slingerformule van FOUCAULT ten grondslag zijn gelegd.

De afwijkingen, die in III § 1 van het 2<sup>e</sup> Stuk zijn beschreven en voor de draaiing van het slingervlak zeer verschillende waarden

<sup>1)</sup> *Compt. Rend.* T. 35, pg. 855.

in verschillend azimuth leverden, voerden zelfs tot het verkondigen van de ongegronde meening, dat er een merkbaar verschil bestond tusschen de draaiingssnelheid van het slingervlak in en loodrecht op den meridiaan. Zonder twijfel moeten die afwijkingen echter daaraan toegeschreven worden, dat de omstandigheden onder welke de theoretische formule geldt, bij de gebruikte slingers niet verwezenlijkt zijn. Dat die formule niet zonder meer op de bewegingsverschijnselen daarvan mag worden toegepast en slechts als eene eerste benadering kan worden beschouwd blijkt reeds daaruit, dat de slingeringen bijna altijd elliptisch worden, terwijl zij bij den enkelvoudigen slinger voortdurend vlak moesten blijven, wanneer zij dit aanvankelijk waren.

De slingerproef van FOUCAULT doelmatig met een kleinen slinger te verrichten, is dus een onopgelost vraagstuk gebleven, waarop mijne opmerkzaamheid door prof. KIRCHHOFF werd gevestigd.

De oplossing van dit vraagstuk met behulp van den beschreven slinger ligt voor de hand, zooals ook de afwijkingen bij de slingerproef van FOUCAULT, met mijne slingerproeven en met de afwijkingen bij de proeven van BRAVAIS in het tweede Stuk onder een zelfde gezichtspunt zijn gebracht. Immers de proef van FOUCAULT moet eenerzijds, zooals de figuren van LISSAJOUS anderzijds, als uiterste geval van de klasse B worden opgevat.

Wanneer men  $\psi'$  (door gewichten op het tafeltje te plaatsen) tot  $90^\circ$  maakt, verkrijgen wij eene beweging van het slingervlak met de hoeksnelheid  $-\Omega'$  bij vlak blijvende slingeringen. Voor den enkelvoudigen slinger zou dit  $-\gamma_w$ , die van negatieve ontbondene van de draailngssnelheid der aarde volgens de naar beneden gerichte verticaal zijn. De nauwkeurigheid van onze methode van de bepaling van de draaiing van het slingervlak is onafhankelijk van de lengte van den slinger, en wanneer men hem aan zeer harde messen in verdunde lucht ophangt, zal men de proef gedurende eene geheele omdraaiing kunnen voortzetten, zonder dat de afname der amplituden schade doet aan de nauwkeurigheid van de bepaling van het slingervlak.

Wanneer  $\psi'$  weinig afwijkt van  $90^\circ$  hebben wij verschijnselen van de klasse B. I, waarbij de kleine as der ellips echter klein is in verhouding tot de groote. De beweging van de groote as blijft dan nagenoeg, die welke overeenkomt met de beweging van het slingervlak in de proef van FOUCAULT, maar deze wordt *gestoord* door een verschil van de slingertijden om twee horizontale assen door het ophang-

punt. De storingen ten gevolge van deze oorzaak zoowel als die ten gevolge van de wrijving werden in het 2<sup>e</sup> Stuk behandeld en vormen de verklaring van de regelmatige door BUNT en anderen opgemerkte, en vooral door VAN DER WILLIGEN onderzochte afwijkingen, waarmede zij in hoofdzaak overeenkomen.

§ 9. De volgende proef levert een voorbeeld van de klasse B. L. bij zeer kleine waarden van  $\psi''$ , dus van een gestoorde slingerproef van FOUCAULT.

Toestel met nieuw geharde stalen messen.

Vergrooting als bij [A].

Azimuth van het benedenmes + 59° 8'.

Azimuth van het bovenmes - 31° 20'.

[L. I] (18 Sept.)

| Tijd.                 | Azimuth ( $X$ ). | $x$             |
|-----------------------|------------------|-----------------|
| 0                     | + 56°26'         | 0               |
| 30'                   | + 62°4'          | Max 1°26' [+]   |
| 59'                   | + 68°4'          |                 |
| 1 <sup>u</sup> 29.'5  | + 74°8'          |                 |
| [Niet waargenomen]    | [+ 87°34']       | [0]             |
| 4 <sup>u</sup> 14'    | - 72°6'          |                 |
| 9 <sup>u</sup> 13'    | + 8°24'          | Max 16°23'½ [+] |
| 14 <sup>u</sup> 31.'7 | + 59°14'         |                 |

$$\psi'' = 17^{\circ} 49' \frac{1}{2},$$

$$\gamma_w = -12^{\circ}.01.$$

De verbeteringen voor eindige amplituden en wrijving waren in dit geval onbetekenend en wij kunnen terstond de theoretische berekening toepassen. Duidelijker kan men de verschijnselen, die de theorie voorspelt, nagaan bij de volgende proef:

[L. II] (19 Sept.)

| Tijd.                 | Azimuth ( $X$ ).    | $\alpha$           |
|-----------------------|---------------------|--------------------|
| 0 <sup>u</sup>        | — 47°8'             | $\beta_0 = 5.6796$ |
| 15'                   | — 40°8'             |                    |
| 34'.8                 | — 39°36'            | 1°15' [+]'         |
| 1 <sup>u</sup> 5'.7   | — 33°32'            | 2°36'              |
| 1 <sup>u</sup> 32'.5  | — 27°48'            | 3°7½'              |
| 2 <sup>u</sup> 2'.7   | — 21°38'            | 3°46'              |
| 2 <sup>u</sup> 31'.1  | — 15°20'            | 4°4' } Max 4°25½'  |
| 3 <sup>u</sup> 13'.9  | — 6°44'             | 4°47' }            |
| 3 <sup>u</sup> 29'.8  | — 2°20'             | 2°30' [+]'         |
| 4 <sup>u</sup> 10'.6  | + 5°4'              |                    |
| 4 <sup>u</sup> 27'.4  | + 8°14'             | nagenoeg 0 [+]'    |
| 4 <sup>u</sup> 32'.4  | + 9°32'             |                    |
| 4 <sup>u</sup> 35'.4  | + 9°58'             | 0                  |
| 4 <sup>u</sup> 40'    | + 10°52'            | $\beta_1 = 5.1146$ |
| 4 <sup>u</sup> 42'.4  | + 11°24'            | 0                  |
| 4 <sup>u</sup> 45'.4  | + 11°52'            | nagenoeg 0 [—]'    |
| 5 <sup>u</sup> 11'.2  | + 16°52'            | 1°56'              |
| 6 <sup>u</sup> 9'.9   | + 27°56'            |                    |
| 9 <sup>u</sup> 4'.9   | + 68°               | 13°17'             |
| 9 <sup>u</sup> 19'.8  | + 68°24'            | 13°45'             |
| 9 <sup>u</sup> 31'.7  | + 70°52'            | 13°54' } [—]'      |
| 9 <sup>u</sup> 49'.6  | + 74°12'            | 13°1' } Max 13°36' |
| 9 <sup>u</sup> 53'.6  | + 74°               | 13°53' }           |
| 10 <sup>u</sup> 13'.5 | + 78°52'            | 13°34'             |
| 10 <sup>u</sup> 23'.4 | + 80°36'            | 13°33'             |
| 10 <sup>u</sup> 36'.4 | + 83°52'            | 12°50' [—]'        |
| 10 <sup>u</sup> 54'.2 | + 86°52'            |                    |
| 14 <sup>u</sup> 21'   | — 49°20' (+130°40') | 0                  |
| 14 <sup>u</sup> 25'   | — 48°16'            | 0                  |
| 14 <sup>u</sup> 31'   | — 47°0'             | 0                  |
| 14 <sup>u</sup> 34'   | — 46°40'            | 0                  |
| 14 <sup>u</sup> 43'   | — 45°16'            | 0                  |
| 14 <sup>u</sup> 54'   | — 41°40'            | nagenoeg 0 [+]'    |

Uit  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  volgt  $\psi'' = 18^{\circ}1\frac{1}{2}'$ ; uit  $14^u32' = 47^{\circ}19'$  voor de geheele omdraaiing van het slingervlak  $14^u33' = 47^{\circ}8'$ ,  $\gamma_w = -11^{\circ}.80$ .

Uit de eerste onderperiode vinden wij

$$\psi'' = 18^{\circ}.34'; \quad \gamma_w = -12^{\circ}.09.$$

Uit de tweede onderperiode

$$\psi' = 17^{\circ}51; \gamma_w = -11^{\circ}70.$$

Dus [L. II] ...  $\gamma_w = -11^{\circ}.87.$

§ 10. Is het alleen om de *berekening* van  $\gamma_w$  te doen, zoo behoeft men niet eene geheele omdraaiing van het slingervlak af te wachten, maar men zal, daar, zooals in § 2 van Hoofdst. II werd opgemerkt, de bepaling van het azimuth van de groote as van een slingerings-ellips minder nauwkeurig wordt, naarmate de verhouding van de kleine as tot de groote toeneemt, de proef het liefst zoo inrichten, dat men bij het begin en het einde op rechthoekige slingeren instellen kan, en de proef dus eene geheele onderperiode omvat. Kent men de ligging van de symmetriesssen van den slinger, zoo kan men het aanvankelijk azimuth gemakkelijk zoo kiezen, dat de proef niet langer duurt dan men wensch. De berekeningswijze [ $\delta$ ], die men dan toepassen moet, geeft dezelfde uitkomsten als eene andere, die ik aan prof. KIRCHHOFF te danken heb, en die ik hier in aansluiting aan vroegere formules af zal leiden.

Volgens het eerste stuk heeft men

$$\left(\frac{Tg \chi_x}{Tg X_0}\right)^2 = -\frac{Tg \frac{1}{2}(\psi' - \varepsilon)}{Tg \frac{1}{2}(\psi' + \varepsilon)};$$

dus

$$\frac{1 - \left(\frac{Tg \chi_x}{Tg X_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{Tg \chi_x}{Tg X_0}\right)^2} = \frac{\text{Sin}^2 \psi'}{\text{Sin}^2 \varepsilon}.$$

Past men twee malen de regel van NEPER op die rechthoekigen spherischen driehoek bij aanvankelijk vlakke slingeren toe, zoo vindt men

$$\frac{\text{Cos } 2\delta}{\text{Cos } 2 X_0} = \frac{\text{Sin}^2 \psi'}{\text{Sin}^2 \varepsilon}.$$

Men kan dus  $2\delta$  vinden, vervolgens uit  $2\delta$  en  $2 X_0$  volgens de meermalen gebruikte formule  $\text{Sin } \psi'$ ,  $\psi'$  en eindelijk  $\gamma_w$  als te voren.

Evenzoo volgt uit ( )

$$\left(\frac{Tg \chi_y}{\text{Cotg } X_0}\right)^2 = -\frac{Tg \frac{1}{2}(\psi' - \varepsilon)}{Tg \frac{1}{2}(\psi' + \varepsilon)},$$

en dus

$$\frac{1 - \left(\frac{Tg \chi_y}{\text{Cotg } X_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{Tg \chi_y}{\text{Cotg } X_0}\right)^2} = \frac{\text{Sin } \psi'}{\text{Sin } \varepsilon}.$$

Men vindt dus uit eene onderperiode, waarin de assen van de slingeringsellips in het midden de verhouding  $n$  hebben en waarbij de hoek tusschen de rechtlijnige begin- en eindslingering  $2\phi_0$  is, door

$$\cos 2\delta = \frac{1 - \left(\frac{n}{Tg\phi_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{n}{Tg\phi_0}\right)^2} \cos 2\phi_0, \quad \sin \psi' = \frac{Tg 2\phi_0}{Tg 2\delta},$$

$\psi'$  volledig bepaald, daar het tusschen  $0^\circ$  en  $90^\circ$  moet liggen, verder past men de berekeningswijzen toe, die in 't vorige werden behandeld.

Wij geven nog een voorbeeld voor een kleine waarde van  $\psi''$ .

[M] (20 Sept.)

Alles als bij [L], slechts in de richting van het bovenmes aan elke zijde op den afstand van 4 CM., toegevoegd 10 Gr.

| Tijd.                 | Azimuth ( $X$ ). | $x$                    |
|-----------------------|------------------|------------------------|
| 0                     | $-44^\circ 21'$  | 0                      |
| 10'                   | $-41^\circ 50'$  |                        |
| 17'                   | $-40^\circ 28'$  | [+] <sup>r</sup>       |
| 36'                   | $-36^\circ 34'$  | $1^\circ 3'$           |
| 1 <sup>h</sup> 32'    | $-24^\circ 38'$  | $2^\circ 42'$          |
| 3 <sup>h</sup> 2'.7   | $-18^\circ$      | $2^\circ 19'$          |
| 8 <sup>h</sup> 7'.1   | $-4^\circ 52'$   | $2^\circ 5'$           |
| 4 <sup>h</sup> 8'.25  | $+7^\circ 38'$   | 0                      |
| 4 <sup>h</sup> 10'.2  | $+8^\circ 16'$   | 0                      |
| 4 <sup>h</sup> 14'.7  | $+8^\circ 52'$   | 0                      |
| 4 <sup>h</sup> 18'.7  | $+9^\circ 52'$   | 0                      |
| 4 <sup>h</sup> 21'.25 | $+10^\circ 44'$  | 0                      |
| 4 <sup>h</sup> 25'.25 | $+11^\circ 20'$  | begin [-] <sup>r</sup> |

$$\psi'' = 13^\circ 20', \quad \gamma_w = -12^\circ.10.$$

Het gemiddelde uit [L. I], [L. II] en [M] wordt

$$-\gamma_w = 11^\circ.99, \quad \text{Theorie } -12^\circ.03.$$

De vergelijking van deze uitkomst met de proeven van VAN DER WILIGEN toont weder, dat de slingerproef van FOUCAULT met onzen kleinen slinger, wanneer men slechts acht geeft op de noodzakelijke eenvoudige verbeteringen, zeer doelmatig verricht kan worden.

# STELLINGEN.

---

## I.

Geen der bewijzen voor de tweede wet der mechanische warmte-theorie, bij een omkeerbaar kringproces, die men uit de wetten der mechanica alleen heeft trachten af te leiden, zonder te letten op de waarschijnlijkheid van elken bizonderen bewegingstoestand onder een groot aantal mogelijke — kan den toets der kritiek doorstaan.

## II.

Ook aan BOLTZMANN's beschouwingen daarover kan geen bewijskracht worden toegekend.

## III.

O. E. MEYER's bewijs voor de wet van snelheidsverdeeling van MAXWELL-BOLTZMANN is onhoudbaar.

## IV.

Het verschil tusschen de waarde, die de waarneming oplevert voor de verhouding van den lineairen tot den cubischen elasticiteitscoëfficiënt, en die, welke theoretisch uit de onderlinge moleculaire werking van een stelsel rustende punten kan worden afgeleid, vindt zijne verklaring in de warmtebeweging.

## V.

Het is niet waarschijnlijk, dat de wetten van de voortplanting van het geluid in strijd zijn met de kinetische gastheorie.

## VI.

De verklaring der radiometerverschijnselen moet worden gezocht in de eigenschappen der niet-stationaire warmtegeleiding in gassen.

## VII.

De electromagnetische theorie geeft de meest bevredigende verklaring van de verschijnselen van het licht.

## VIII.

MAXWELL'S verklaring van de draaiing van het polarisatie-vlak onder de werking van magneten is onbevredigend en onvoldoende.

## IX.

De brekingsindex van de vloeistoffen vertoont opmerkelijke veranderingen in de nabijheid der kritische temperatuur. De nevelvorming bij dit punt moet worden toegeschreven aan den overgang van toestanden met zeer verschillende brekingsindex in elkander bij eene zeer geringe warmtebinding.

## X.

De wet van WEBER verklaart het best de electriche verschijnselen.

## XI.

BERTRAND maakt ten onrechte tegenwerpingen tegen HELMHOLTZ' „Theorie der Wirbelbewegung”.

## XII.

Terecht stelt KIRCHHOFF aan de mechanica ten doel de eenvoudigste beschrijving van alle bewegingsverschijnselen.

## XIII.

De voornaamste beteekenis der niet-Euclidische meetkunde moet voorloopig in de verklaring en de ontwikkeling van het stelsel van noodzakelijke en toereikende axioma's voor de Euclidische worden gezocht.

## XIV.

Het begrip van ruimte is langs empirischen weg gevormd.

## XV.

Er bestaat geen wezenlijk onderscheid tusschen de methoden van het wiskundig en van het natuurkundig onderzoek.

## XVI.

De onderzoekingen van VAN DER WAALS openen het vooruitzicht op de bepaling van het moleculairgewicht van vloeibare verbindingen.

## XVII.

Alle scheikundige verbindingen kunnen uit het oogpunt der valentie worden geconstrueerd door aan te nemen, dat er twee groepen van elementen zijn, van welke de eene trivalent de andere quadrivalent is; tot de eerste daarvan behoort de waterstof.

## XVIII.

De structuur van benzol wordt het best door de rangschikking van de koolstof-atomen in een driezijdig prisma uitgedrukt.

## XIX.

THOMSON'S hypothese over den vortex-aard der atomen is eene belangrijke schrede op het gebied der mechanische natuurverklaring en drukt het zegel op SPINOZA'S woorden: „Materia ubique eadem est, nec partes in eadem distinguuntur, nisi quatenus materiam diversimode affectam concipimus.

---

Fig. 5.

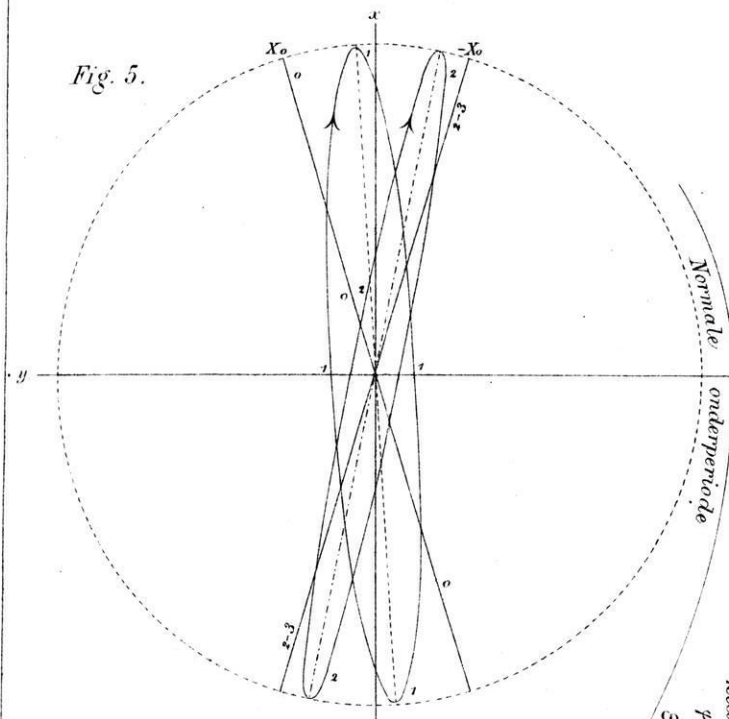


Fig. 4.  
 $\varphi = 30^\circ$   
 $\varepsilon = 105^\circ$

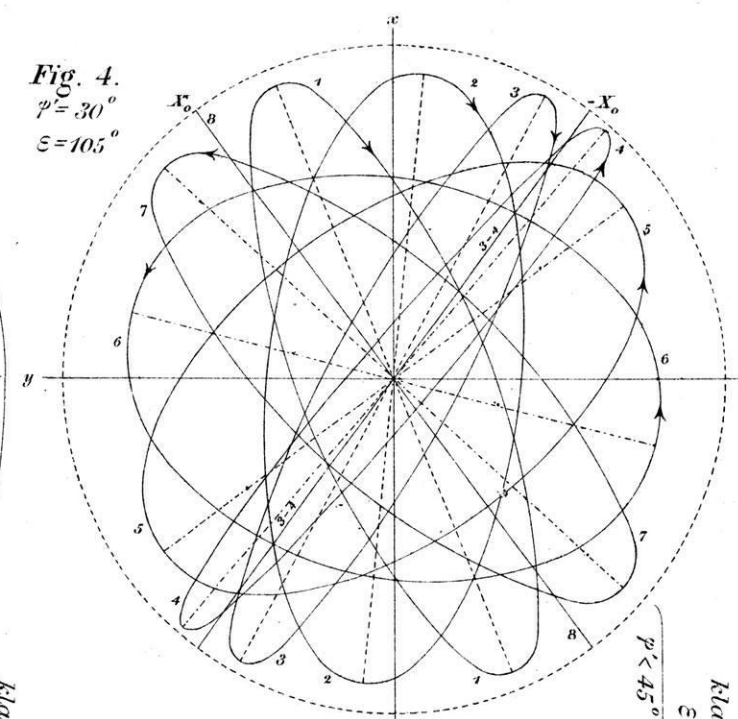


Fig. 1.

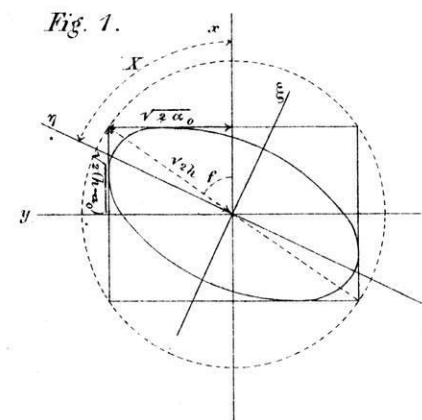


Fig. 2.

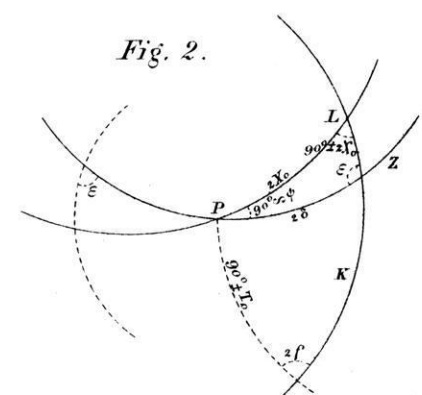


Fig. 3.  $\varphi = 30^\circ$

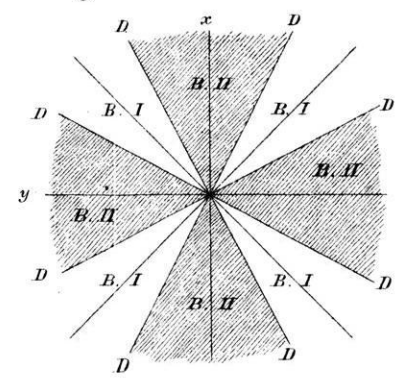


Fig. 8.

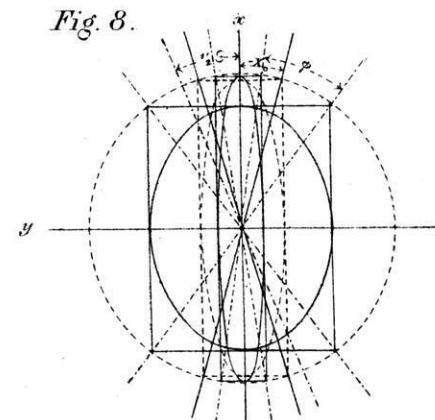


Fig. 6.

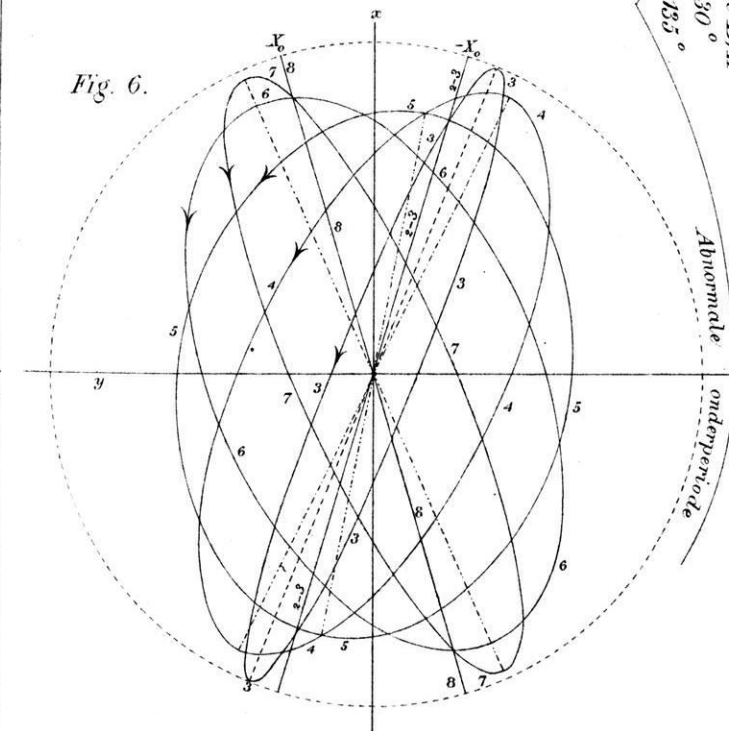


Fig. 7.  
 $\varphi = 60^\circ$   
 $\varepsilon = 105^\circ$

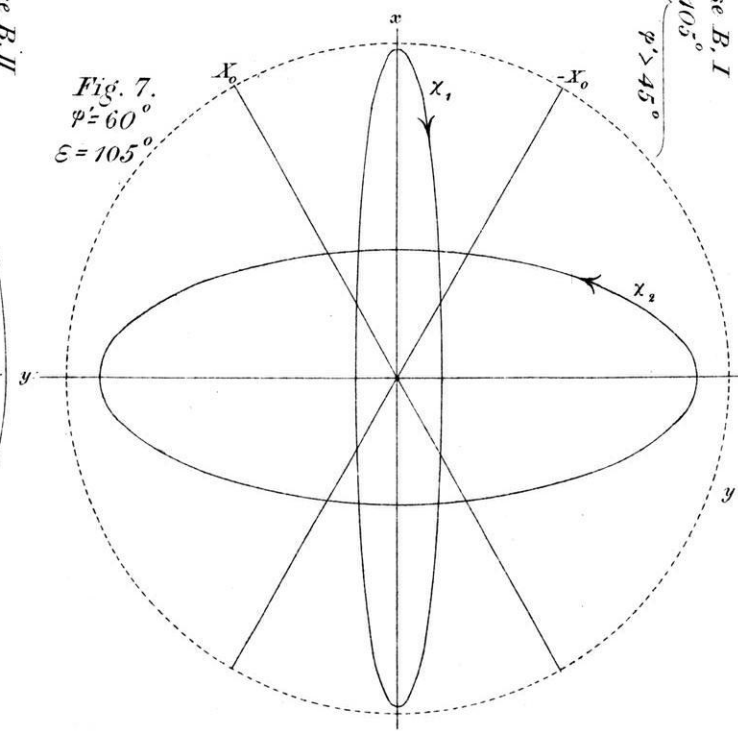


Fig. 9.

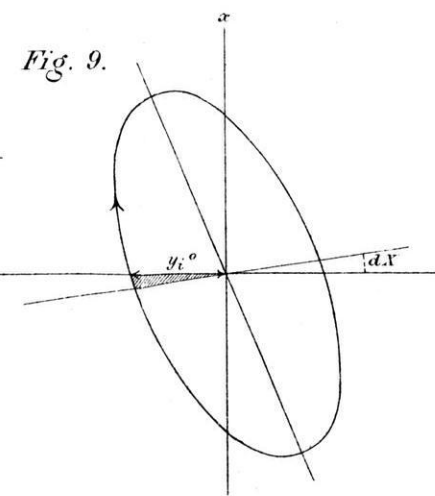
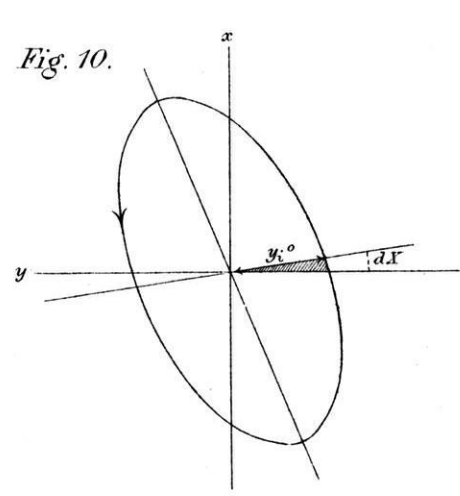
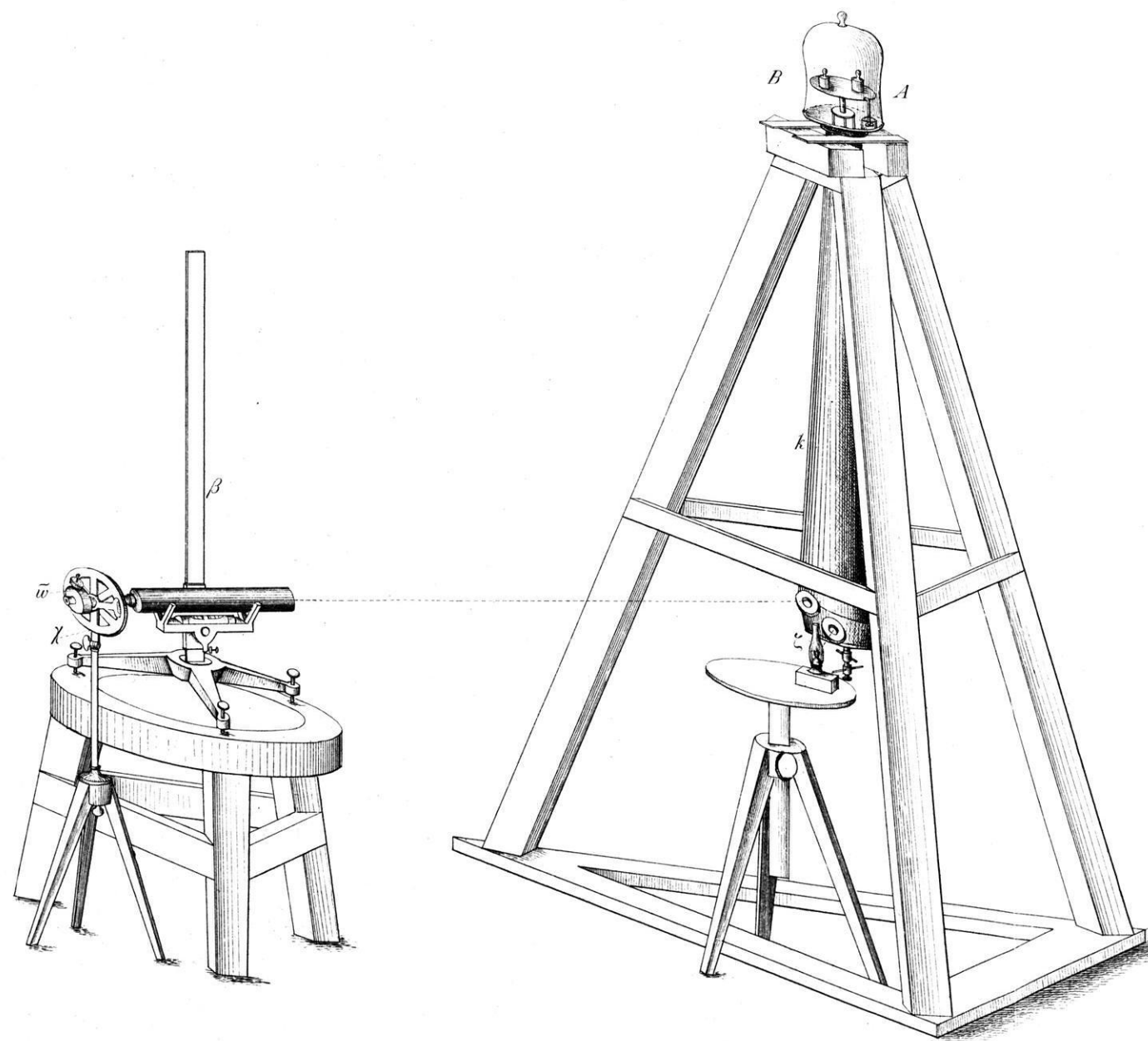


Fig. 10.









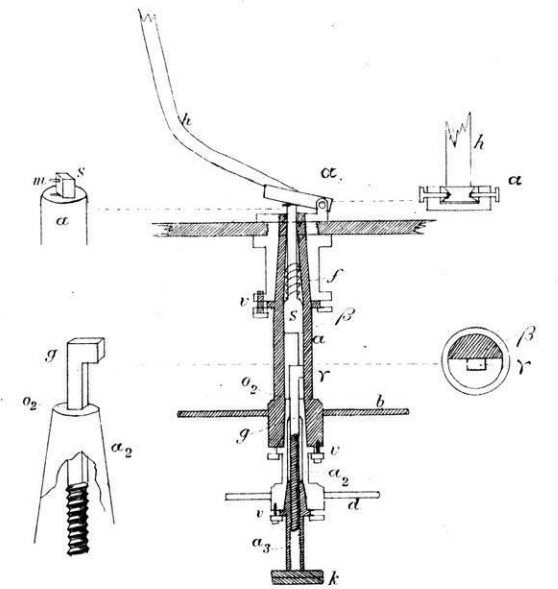
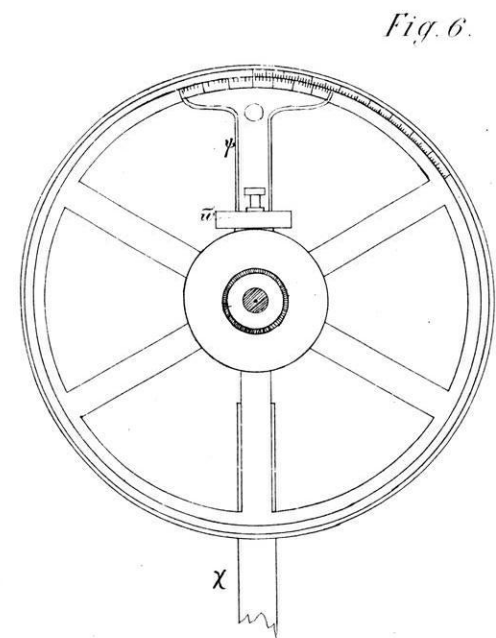
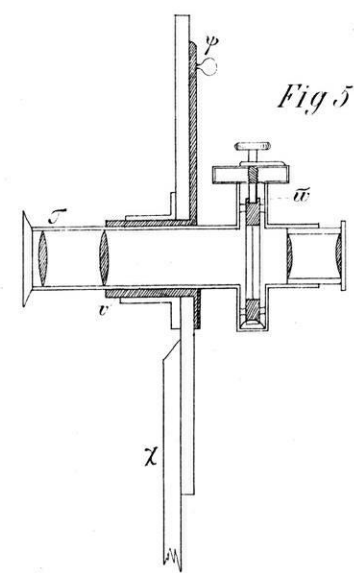
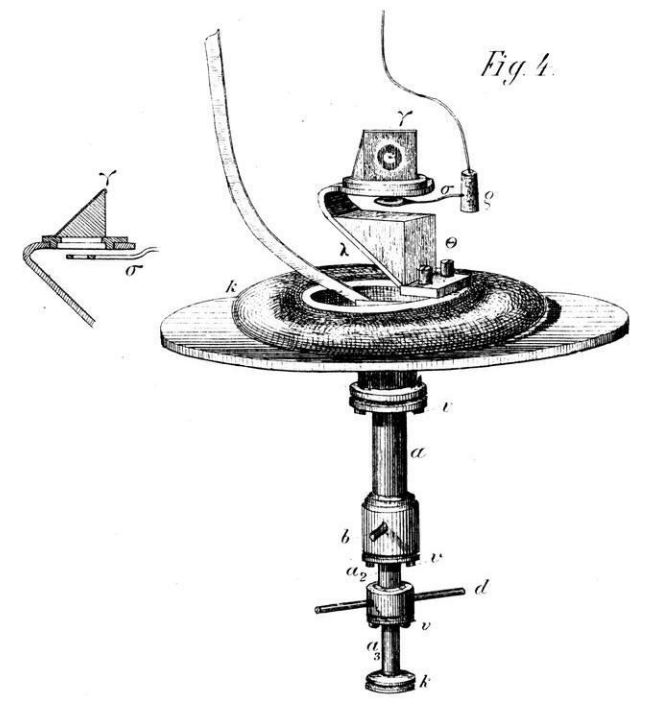
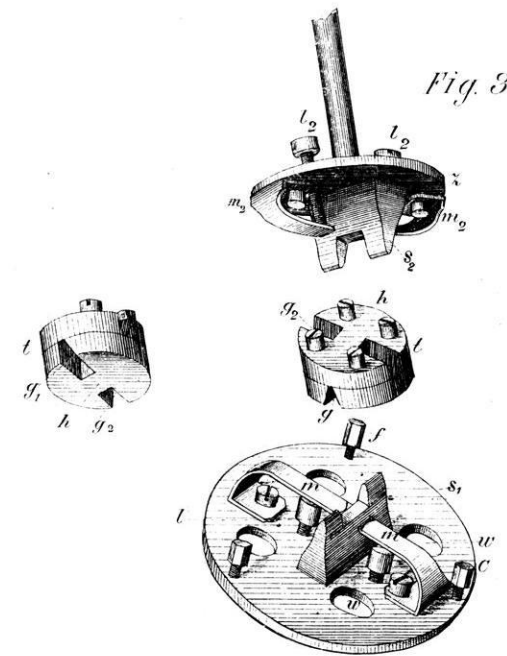
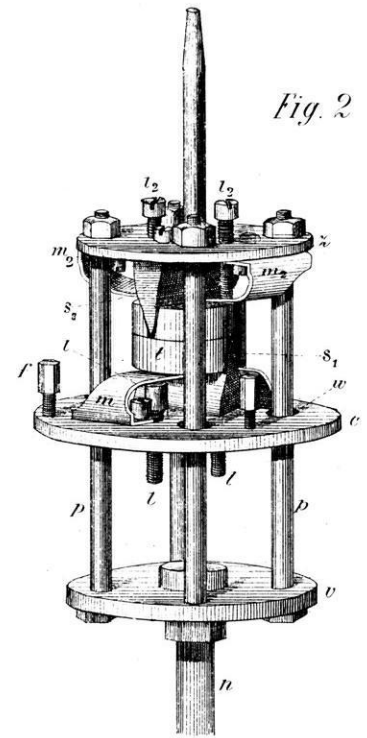
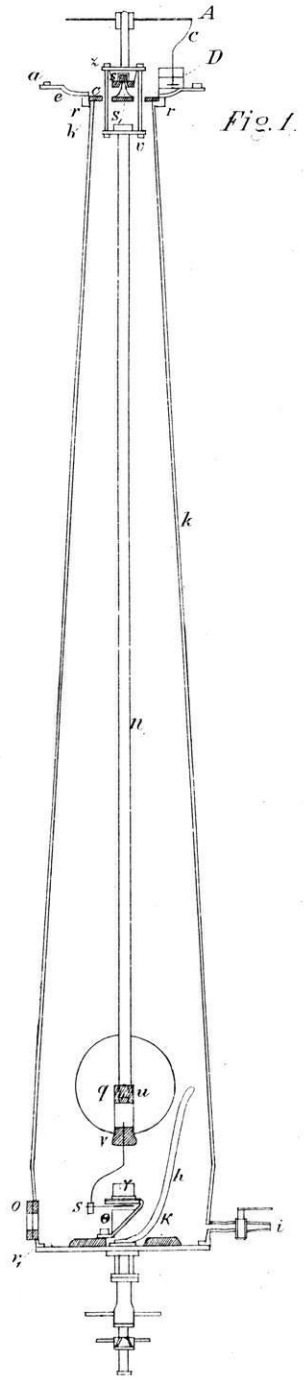




Fig. 1.

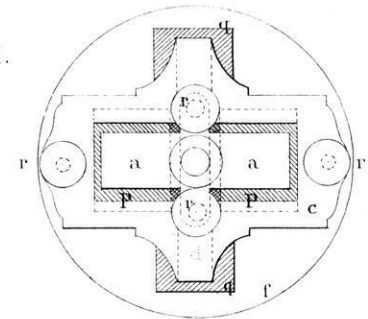


Fig. 2.

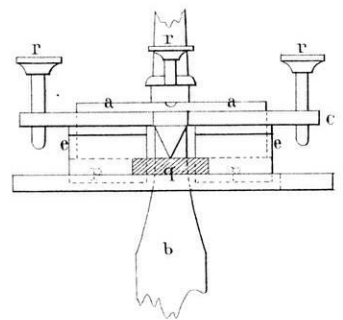


Fig. 3.

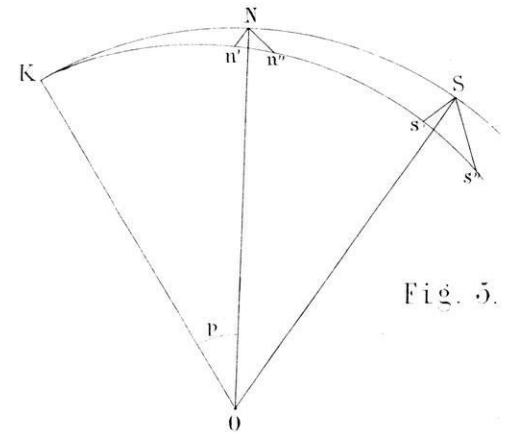
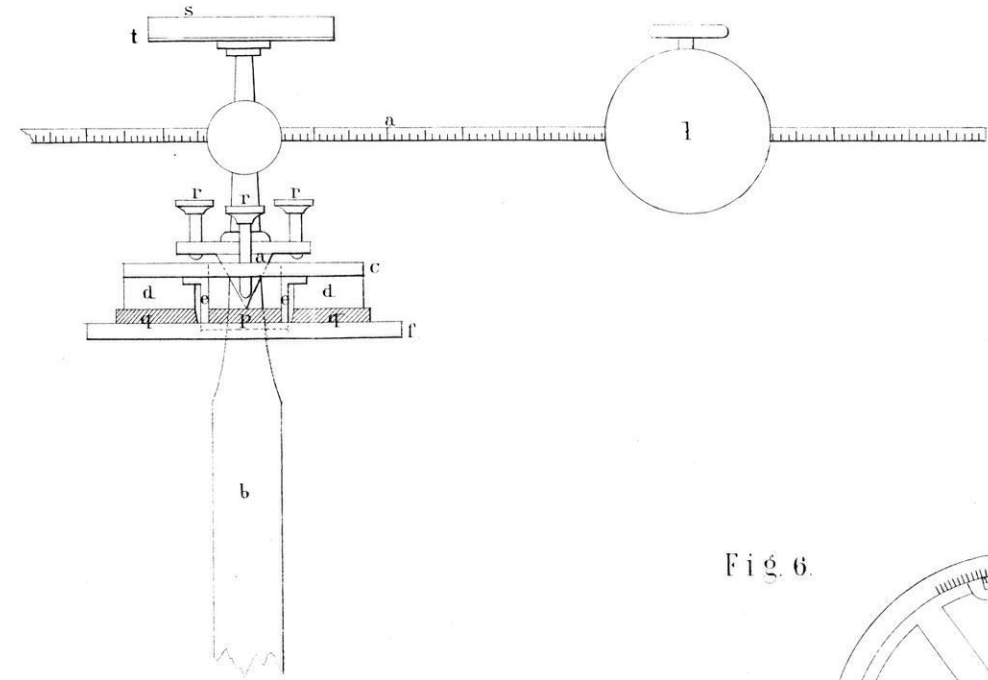


Fig. 5.

Fig. 4.

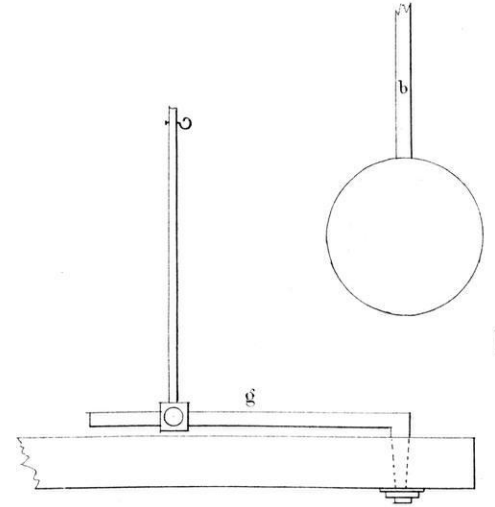


Fig. 6.

